

# APLICAÇÃO DE PROGRAMAÇÃO ESTOCÁSTICA PARA ESTRATÉGIAS DE INVESTIMENTOS EM FUNDOS ESTRUTURADOS

**Bruno Marquetti Vanzetto e Oswaldo L.V. Costa**

Universidade de São Paulo, Departamento de Engenharia de  
Telecomunicações e Controle, 05508-900 São Paulo SP-Brasil  
Emails: [oswaldo@lac.usp.br](mailto:oswaldo@lac.usp.br), [brunovanzetto@yahoo.com.br](mailto:brunovanzetto@yahoo.com.br)

**Resumo:** Este trabalho apresenta a aplicação de uma abordagem via programação estocástica linear para tomada de decisão em um fundo de investimento estruturado. Uma metodologia de média de vários cenários é aplicada para definição da alocação inicial de uma carteira formada por caixa e derivativos de índice de ações. A partir dessa alocação é feita uma análise do sucesso dessa carteira em superar a performance do índice Bovespa. Além disso, é feita uma análise comparativa contra uma carteira formada apenas por caixa e um ativo de risco cujo retorno seja o do índice Bovespa. Tal comparação analisa a diferença de performance e também a diferença de risco medido pelo VaR (value at risk) versus retorno.

**Palavras Chave:** Programação estocástica, fundos de investimento, alocação ótima de investimentos.

## 1. Introdução

O problema de tomada de decisão de investimento no mercado de fundos de investimento no Brasil tem se tornado cada vez mais importante e complexo com o crescimento e sofisticação do mercado de capitais no Brasil. O objetivo deste trabalho é a aplicação de uma metodologia de tomada de decisão de investimento no instante atual que seja determinada a partir da aplicação de um modelo de otimização baseado em programação estocástica. Este trabalho foi baseado principalmente no estudo feito por Figueiredo (2011) que foi aplicado ao contexto de gestão de fundos de pensão empregando técnicas de ALM. Um dos primeiros trabalhos envolvendo aplicações de programação estocástica a problemas de gestão de carteiras foi realizado por Bradley e Crane (1972), que estudaram a gestão multi-período de uma carteira de títulos. A partir deste trabalho, muito foi feito e revisões detalhadas dos trabalhos realizados de aplicações de programação estocástica aos problemas de gestão de fundos de pensão e empresas de seguro foram efetuados por Silva (2001) e Kouwenberg e Zenios (2006). Neste estudo o objetivo é aplicar tais técnicas a fundos de investimento num contexto mais geral com o mesmo foco de otimização da alocação de investimentos considerando o *tradeoff* entre risco o retorno. Foi escolhida como base a carteira de um Fundo Estruturado brasileiro composto de caixa e derivativos de índice de ações que tem como objetivo superar o desempenho do índice Bovespa.

## 2. Programação Estocástica

O problema de otimização estocástica com recurso multiestágio pode ser elaborado conforme a formulação abaixo após definida uma discretização para a variável aleatória do problema e a construção de uma árvore de cenários, neste caso equiprovável, correspondente aos estágios futuros de tomada de decisão.

$$\begin{aligned} \max \frac{1}{N_T} \sum_{i=0}^{N_T} \{c^T \cdot x_T(w_{T,i})\} & \quad , \text{ para } t=T \\ Aeq.x = beq & \quad , 0 \leq t \leq T \\ A.x \leq b & \quad , 0 \leq t < T \end{aligned}$$

Onde a primeira expressão representa a função objetivo a ser maximizada e as outras duas restrições associadas à modelagem do problema. Detalhes sobre o tratamento de um problema de programação estocástica foram apresentados por Birge e Louveaux (1997).

### 3. Descrição da estratégia de investimento e modelagem

A carteira que será modelada será composta de 3 ativos: Caixa aplicado em Certificado de Depósito Bancário (CDB) de prazo 2 meses, Contrato Futuro de Ibovespa de prazo 2 meses e Opções de compra (*calls*) sobre o Futuro de Ibovespa sempre *at-the-money-forward*. O período de vida do fundo considerado será de 1 ano e os momentos de tomada de decisão serão a cada 2 meses ocorrendo, portanto, 6 tomadas de decisão.

A estratégia de investimento a ser implementada com os instrumentos financeiros descritos acima será a de, repetidamente a cada estágio de tomada de decisão, realizar operações sempre constituídas de compra de futuro e venda de *call* com valores nominais iguais, o que corresponde a vendas de *puts* sintéticas, além de permanecer sempre positivo em caixa.

O conceito financeiro em que se baseia a estratégia é o de realizar repetidas vendas de *puts* sintéticas de curto prazo buscando a cada estágio acumular o prêmio recebido de modo a superar a performance do índice Bovespa num cenário de movimento de alta moderada, além também servir como “colchão” para atenuar as perdas em um cenário de baixa.

O Fundo Estruturado deste estudo adotará a hipótese de que a taxa de resgate para saques antes do fim da vida do fundo é proibitiva e, portanto, será usada a hipótese de não ocorrência de resgates intermediários e apenas um resgate único e total ao fim da vida do fundo. Além disso, será também adotada a hipótese de que todas as aplicações são concentradas no início da vida do fundo. A evolução do valor aplicado inicialmente será modelada de modo a ter retorno acumulado igual ao retorno acumulado do índice Bovespa, de modo a definir um “passivo-alvo” que será usado na modelagem de otimização como uma referência. Muito embora o fundo deste estudo não assuma a obrigação de retornar a performance do índice Bovespa.

#### 3.1 Árvore de Cenários

A árvore de cenários será do tipo não recombinante e a estrutura da árvore será simétrica tal que de cada nó descenderão outros 2 nós cujas probabilidades de ocorrência serão iguais a 50%. A evolução dos parâmetros de mercado dos ativos presentes na carteira do fundo será então dada por  $R^*(w_t) = \mu + Q^{1/2}.W$  para nós ascendentes e  $R^*(w_t) = \mu - Q^{1/2}.W$  para nós descendentes, onde  $R^*$  é o vetor formado pelo retorno dos parâmetros de mercado entre os instantes  $t$  e  $t-1$ ,  $\mu$  é o vetor formado pelas médias de cada um dos parâmetros,  $Q$  a matriz de covariância dos parâmetros e  $W$  é um vetor de variáveis aleatórias com distribuição normal, média nula e desvio padrão unitário. Para o problema deste trabalho as variáveis de mercado que serão incluídas na árvore de cenários são as descritas abaixo.

Índice Bovespa a vista: Índice de preço formado pela média dos preços das ações com maior volume de negociação nos últimos meses da BM&FBovespa.

Taxa DI(2M): Taxa referente a 2 meses obtida através interpolação de taxas negociadas em Contratos Futuros de DI negociados na BM&FBovespa.

Volatilidade Ibovespa (2M): Volatilidade referente a 2 meses obtida através da interpolação das volatilidades implícitas em opções sobre Futuro de Ibovespa negociadas na BM&FBovespa.

#### 3.2 Modelagem da Rentabilidade dos Ativos

A rentabilidade para cada ativo entre cada dois cenários consecutivos será obtida a partir das formulas de apreçamento abaixo.

Caixa:  $a(t) = a(t - 1)(1 + r)$

Futuro de Ibovespa:  $p_f(t) = p_{IBOVspot} \cdot (1 + DI)^{n/252}$

Call:  $p_o(t) = p_{IBOVspot} \cdot N(d_1) - K \cdot e^{-rT} \cdot N(d_2)$ ,  $d_1 = \frac{\ln\left(\frac{p_{IBOVspot}}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot T}{\sigma\sqrt{T}}$ ,  $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$

onde  $p_{IBOVspot}$  representa o valor *spot* do Índice Bovespa e K o *strike* da opção. Assim entre cada 2 cenários econômicos consecutivos estarão associados a cada um dos ativos da carteira dois valores de mercado, dos quais pode-se definir um fator de rentabilidade conforme abaixo.

Caixa:  $r_a = \frac{a(t)}{a(t-1)} = (1 + r)$

Futuro de Ibovespa:  $r_f = (p_{IBOVspot}(t) - p_f(t - 1))/p_f(t - 1)$

Call de Futuro de Ibovespa:  $r_o = \max\left(0, p_{IBOVspot}(t) - p_f(t - 1)\right)/p_o(t - 1)$

Desse modo ao vetor  $R^*$  de retornos dos parâmetros de mercado estará associado um vetor de fatores de rentabilidade  $R$  formado pelos fatores de rentabilidade dos ativos da carteira.

### 3.3 Restrições de Balanço, Inventário e Estratégia

Considerando que o problema deste trabalho é baseado na estratégia onde as transações com futuros serão apenas de compra e as com opções apenas de vendas a notação para o valor financeiro alocado em caixa no instante  $t$  será  $a(w_t)$ , para o valor alocado em futuros a notação será  $f(w_t)$  e para o valor alocado em opções será usado  $o(w_t)$ .

As variáveis de decisão, isto é, as variáveis sobre as quais o gestor do fundo pode atuar são o volume de compras e vendas em cada instante  $t$ . As compras de futuros serão denotadas por  $c_f(w_t)$  enquanto que as vendas de opções serão denotadas por  $v_o(w_t)$ .

Assim considerando que a negociação de um contrato futuro não envolve troca de caixa no instante de operação, podemos escrever que o valor total da carteira no instante atual é igual ao valor de liquidação dos derivativos negociados no instante anterior, somado o valor em caixa no instante anterior corrigido por sua rentabilidade, subtraídos os custos das transações no instante atual e somada a variação no valor do passivo resultante de aplicações e resgates no instante atual. A partir disso as seguintes relações podem ser escritas

$$o(w_t) = -v_o(w_t) \quad \text{para } 0 \leq t < T$$

$$f(w_t) = c_f(w_t) \quad \text{para } 0 \leq t < T$$

$$a(w_0) + c_f(w_0)k_f + v_o(w_0)(-1 + k_o) = a_0 \quad \text{para } t = 0$$

$$-a(w_{t-1})r_a(w_{t-1}) - f(w_{t-1})r_f(w_{t-1}) - o(w_{t-1})r_o(w_{t-1}) + a(w_t) + c_f(w_t)k_f + (k_o - 1)v_o(w_t) = \varphi(w_t) \quad \text{para } 0 < t < T$$

$$-a(w_{T-1})r_a(w_{T-1}) - f(w_{T-1})r_f(w_{T-1}) - o(w_{T-1})r_o(w_{T-1}) + a(w_T) = \varphi(w_T) \quad \text{para } t = T$$

Uma restrição de igualdade adicional associada à estratégia do fundo é necessária, pois a cada estágio de tomada de decisão as operações são sempre constituídas de compra futuro e venda de opção com valores nocionais iguais. Desse modo podemos escrever que para  $0 \leq t \leq T$

$$f(w_t) - \frac{o(w_t)}{p_o(w_t)} = 0$$

### 3.4 Restrições de Alocação

Como política de gestão de risco da própria gestora, para esse trabalho usaremos a hipótese que a alocação de recursos em opções terá um limite de 50% do valor total da carteira associado ao *notional* da opção e também um limite de 50% do valor total da carteira associado ao *notional* de futuros. Desse modo podemos escrever para um instante  $0 \leq t < T$ .

$$\frac{o(w_t)}{p_o(w_t)} \leq 50\%(a(w_t) + o(w_t))$$

$$f(w_t) \leq 100\%(a(w_t) + o(w_t))$$

onde  $p_o(w_t)$  é o preço da opção um instante  $t$ .

### 3.5 Modelagem Rentabilidade do Passivo

Seja  $\varphi(w_t)$  a variável que representa a variação do passivo a cada estágio, isto é, do resultado líquido de aplicações e resgates do fundo a cada estágio. Seu comportamento pode ser modelado pela função descrita conforme a expressão abaixo.

$$\varphi(w_t) = \begin{cases} 0, & \text{para } 0 \leq t < T-1 \\ -\varphi_0 \prod_1^n (1 + r_{IBOV,i}(w_t)), & \text{para } t = T \end{cases}$$

onde  $\varphi_0$  representa o valor inicial aplicado no fundo em um instante imediatamente anterior ao da primeira tomada de decisão e  $r_{IBOV,i}(w_t)$  representa o retorno do Índice Bovespa a vista.

### 3.6 Função Objetivo

Conforme abordagem proposta por Valladão (2008) será escolhida uma função objetivo linear por partes tal que

$$z(w_T) = \begin{cases} f_{(+)}RT(w_T), & \text{se } RT(w_T) \geq 0 \\ -f_{(-)}RT(w_T), & \text{caso contrário} \end{cases}$$

onde  $RT(w_t)$  é chamado de resultado técnico do fundo que é definido pela diferença entre o valor total de ativos e o valor do passivo-alvo conforme definido anteriormente. Desse modo, pode-se definir o problema de gestão como o de maximizar a expressão abaixo

$$\max \frac{1}{N_T} \sum_1^{N_T} \{f_{(+)}RT(w_T) - f_{(-)}RT(w_T)\}$$

onde  $f_{(+)}$  e  $f_{(-)}$  representam, respectivamente, uma premiação no caso em que o valor dos ativos é maior que o *benchmark* e uma penalização caso contrário. A razão entre os parâmetros  $f_{(+)}$  e  $f_{(-)}$  pode também ser entendida como uma medida de aversão ao risco. Os parâmetros  $f_{(+)}$  e  $f_{(-)}$  assumirão os valores 1 e -2 respectivamente e  $N_T$  representa o número de nós do último estágio da árvore.

## 4. Metodologia e Simulação

A metodologia proposta por Figueiredo (2011) é de gerar uma árvore de cenários, simular rotina de otimização utilizando método Simplex para definição da alocação ótima no primeiro nó e repetir tal processo por um número  $M$  de vezes, tal que usaremos  $M=200$ . A alocação inicial a ser implementada pelo gestor será então a média de todas as  $M$  alocações iniciais obtidas. Os dados de entrada foram obtidos a partir de dados históricos desde 2009 até 2013. Os retornos médios e a matriz de covariância dos retornos foram estimados como sendo

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_{IBOV} \\ \mu_{DI} \\ \mu_{vol} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,011 \\ -0,059 \\ -0,060 \end{bmatrix} \text{ e } Q = \begin{bmatrix} 0,00174 & -0,00002 & -0,01117 \\ -0,00002 & 0,00009 & 0,00083 \\ -0,01117 & 0,00083 & 0,25111 \end{bmatrix}$$

Não foram considerados custos nas transações envolvendo o caixa do fundo e adotou-se um custo de 0,2% do *notional* sobre transações com futuros e 0,3% do *notional* sobre transações com opções. Além disso, o capital inicial aplicado no fundo foi considerado como sendo 100 milhões de reais. Assim a partir da média das 200 simulações a seguinte alocação inicial para a carteira do fundo, em porcentagem do valor total de ativos, foi

$$x(w_0) = \begin{bmatrix} a_1(w_0) \\ f_1(w_0) \\ o_1(w_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 107\% \\ 33\% \\ -33\% \end{bmatrix}$$

Com o objetivo de avaliar a alocação inicial obtida acima um gráfico com distribuição do resultado técnico do fundo *RT* é apresentado abaixo.

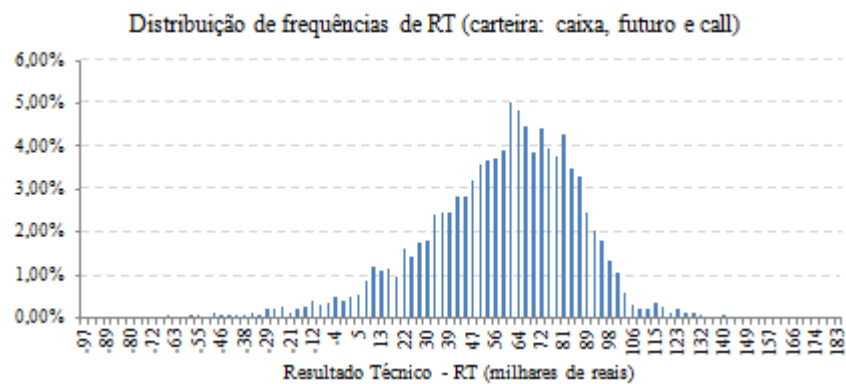


Figura 1 – Distribuição de frequências de RT (carteira: caixa, futuro e call)

Nota-se que a distribuição é deslocada para a direita, apresentando 96% de resultados positivos e apenas 4% de resultados negativos. Tal resultado demonstra que a utilização da estratégia proposta com o objetivo de acompanhar ou superar o índice Bovespa é bastante factível.

#### 4.1 Análise comparativa de carteiras

O estudo a seguir apresenta a comparação do resultado obtido acima contra o resultado da de uma carteira composta apenas de caixa um ativo de risco com retorno coincidente com o do índice Bovespa a vista (Ibov) utilizando-se a metodologia acima descrita. A formulação para simulação de tal carteira é exatamente a utilizada por Figueiredo (2011), apenas com a diferença que para este estudo a evolução do passivo foi modelada de modo a acompanhar o índice Bovespa e foi assumida a hipótese da não ocorrência de resgates intermediários.

Utilizando-se os mesmos dados de entrada apresentados na seção anterior o resultado da alocação inicial obtido foi de 3.97% para Ibov e 96.02% para caixa.

O resultado da distribuição de resultado técnico RT é apresentado no gráfico da esquerda da figura abaixo, do qual o percentual de resultados positivos foi de 77% e resultados negativos 23%, portanto pior que a distribuição da seção anterior. No entanto ao se calcular o valor em risco, *VaR*, histórico com nível de confiança 95% e horizonte de 2 meses obtém-se 7.3 milhões de reais para a carteira de caixa e Ibov, enquanto que para a carteira formada pela estratégia de caixa e vendas de *puts* sintéticas obtém-se 20.5 milhões de reais, mostrando que apesar da distribuição de retornos não ser tão positiva o risco associado medido pelo *VaR* é significativamente menor para a carteira de caixa e Ibov.

Logo um novo estudo foi feito com a carteira composta da estratégia de caixa e vendas de *put* sintéticas, onde o limite de alocação associado ao futuro e à *call* foi reduzido gradualmente até que o *VaR* atingisse o mesmo nível de *VaR* de aproximadamente 7.3 milhões de reais. O resultado deste estudo é apresentado abaixo no gráfico da direita do qual se obteve 10% e de resultados negativos 90% de resultados positivos, portanto ainda sim uma performance significativamente melhor, demonstrando comparativamente assim uma boa relação risco retorno para essa estratégia.

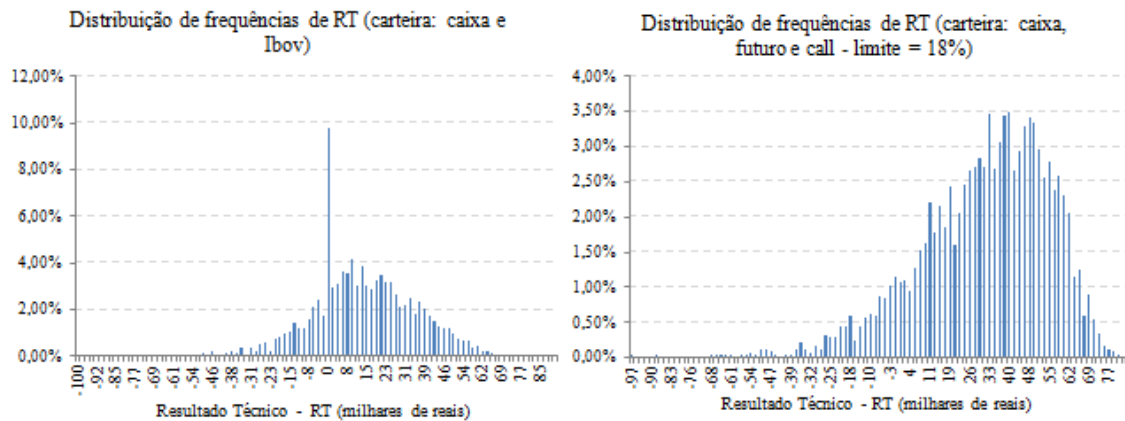


Figura 2 – Comparação de distribuições associadas às duas carteiras

## 5. Conclusão

A partir do estudo deste trabalho pode-se observar o bom desempenho da carteira proposta formada pela estratégia composta de caixa, futuro de ibovespa e *call* em superar a performance do índice Bovespa. Além disso, a partir de análise comparativa com a carteira formada por caixa e Ibov pode-se notar que sua performance se mostrou também superior por apresentar melhor relação risco retorno. O estudo desenvolvido neste trabalho também mostrou-se como sendo uma boa ferramenta para uma análise comparativa entre estratégias a serem implementadas pelo gestor de investimentos.

## 6. Referências

- Birge, J. R. e Louveaux, F.** (1997), Introduction to Stochastic Programming, 1<sup>o</sup> edição, Springer-Verlag, New York, 1997.
- Bradley, S. P. e Crane, D. B.** (1972), A Dynamic Model for Bond Portfolio Management, Management Science, v. 19, n. 2, p. 139-151, 1972.
- Figueiredo, D. Z.** (2011) Tomada de Decisão de Investimento em um Fundo de Pensão com Plano de Benefícios do Tipo Benefício Definido: Uma abordagem via programação Estocástica Multiestágio Linear, Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2011.
- Kouwenberg, R. e Zenios, S. A.** (2006), Stochastic programming models for asset liability management, Zenios, S. A. e Ziemba, W. T., (Eds.), Handbook of Asset and Liability Management -Volume 1: Theory and methodology, Amsterdam, p. 253-303, 2006.
- Silva, L. C.** (2001), Alocação ótima de ativos e derivativos em fundos de pensão via programação estocástica, Tese (Doutorado) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 2001.
- Valladão, D. M.** (2008), Alocação Ótima e Medida de Risco de um ALM para Fundo de Pensão Via Programação Estocástica Multi-Estágio e Bootstrap, Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.