Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Influência da imperfeição no comportamento efetivo para a equação hiperbólica

Larissa Nunes Meirelles da Luz [1]
Aluna do PPGMMat-IFM-Universidade Federal de Pelotas
Leslie D. Pérez-Fernández [2]
Professor Dr. do DME-IFM-Universidade Federal de Pelotas
Julián Bravo-Castillero [3]
Professor Dr. do IIMAS - Universidad Nacional Autónoma de México

1 Resumo

Neste trabalho, aborda-se o problema da propagação de uma onda sem dissipação em um meio unidimensional microperiódico de densidade de massa unitária. Seja ε, $0 < \varepsilon \ll 1$, o parâmetro geométrico que caracteriza a micro-heterogeneidade do meio. O problema consiste em encontrar o deslocamento $u^\varepsilon(x,t)$ que é solução de

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2} & - & \dfrac{\partial}{\partial x}\left[a^\varepsilon(x,t)\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial x}\right] = f(x,t),\ (x,t) \in [(0,1)\backslash\Gamma^\varepsilon] \times \mathbb{R}_+^* \\ -\beta^\varepsilon [\![u^\varepsilon]\!] & = & a^\varepsilon(x,t)\dfrac{du^\varepsilon}{dx},\ \left[\!\!\left[a^\varepsilon(x,t)\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial x}\right]\!\!\right] = 0,\ (x,t) \in \Gamma^\varepsilon \times \mathbb{R}_+^* \\ u^\varepsilon(0,t) & = & u^\varepsilon(1,t) = 0,\ t \in \mathbb{R}_+^* \\ u^\varepsilon(x,0) & = & v(x),\ \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(x,0) = q(x),\ x \in (0,1) \end{array}\right. \tag{1}$$

onde a, f, v e q, representam a propriedade elástica do meio, a força do corpo, e os deslocamentos e velocidades iniciais, respectivamente. A propriedade $a^\varepsilon(x,t) = a(x/\varepsilon, t)$ é uma função diferenciável por partes, ε-periódica em x, positiva e limitada. Ainda, as condições de compatibilidade $v(0) = v(1) = 0$ devem ser satisfeitas. Aqui, Γ^ε é o conjunto de pontos de descontinuidades de $a^\varepsilon(x)$ que correspondem às interfaces entre as fases constituintes do meio, $[\![\cdot]\!]$ é o salto ao redor de cada descontinuidade $x \in \Gamma^\varepsilon$ de $a^\varepsilon(x)$ e $\beta^\varepsilon = \beta/\varepsilon$ estabelece a proporcionalidade entre o salto do deslocamento e a tensão nos pontos de Γ^ε, sendo a tensão em si é contínuo nestes pontos. O caráter rapidamente oscilante do coeficiente a^ε faz com que a resolução analítica direta deste problema seja, no mínimo, muito complexa, enquanto uma abordagem numérica direta requereria de uma discretização muito fina do

[1]larissa.meirelles@hotmail.com
[2]leslie.fernandez@ufpel.edu.br
[3]julian@mym.iimas.unam.mx

domínio, o qual aumentaria consideravelmente o custo computacional e comprometeria a convergência do método numérico adotado. Uma alternativa eficaz é o método de homogeneização assintótica [1], o qual procura uma solução assintótica formal $u^{(\infty)}(x,t,\varepsilon)$ do problema original (1) a qual, neste caso, é uma expansão assintótica da sua solução exata. Tal solução assintótica é uma série de potências de ε em duas escalas cujos coeficientes são soluções da sequência recorrente de problemas que resulta de substituir $u^{(\infty)}(x,t,\varepsilon)$ no problema original (1). Ilustra-se que as soluções exata $u^\varepsilon(x,t)$ e assintótica $u^{(\infty)}(x,t,\varepsilon)$ do problema original (1) convergem para a solução $u_0(x,t)$ do problema homogeneizado quando $\varepsilon \to 0^+$ com relação a uma certa norma.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001 e FAPERGS.

Referências

[1] BAKHVALOV; PANASENKO *Homogenisation. Averaging processes in periodic media.*,Dordrecht: Kluwer, 1989.