Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 7, n. 1, 2020.

Trabalho apresentado no XXXIX CNMAC, Uberlândia - MG, 2019.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Determinação de grafos via matróides

Bruna Santos de Souza [1]
Instituto de Matemática e Estatística - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, BR

1 Introdução e conceitos básicos

Um matróide $\mathcal{M}$ é um par ordenado $(E, \mathcal{I})$, onde $E = \{1, \ldots, n\}$ e $\mathcal{I}$ é uma coleção de subconjuntos de E tais que:

(i) $\emptyset \in \mathcal{I}$;

(ii) $I \in \mathcal{I},\ I' \subset I \Longrightarrow I' \in \mathcal{I}$;

(iii) $I_1,\ I_2 \in \mathcal{I},\ |I_1| < |I_2| \Longrightarrow$ existe $\mathsf{e} \in I_2 \setminus I_1$ tal que $I_1 \cup \mathsf{e} \in \mathcal{I}$.

O conjunto $\mathcal{I}$ é chamado de indepedente do matróide $\mathcal{M}$ e há diversas formas de determinar um matróide e, apesar do conjunto de independentes $\mathcal{I}$ ser único, há diversas formas de determiná-lo. Quando tratamos de matrizes, por exemplo, podemos dizer que nosso conjunto E é formado pelas colunas da matriz e o conjunto de independentes é dado pela família de subconjuntos de E formados por colunas serão LI.

O matróide associado a um grafo G será denotado por $\mathcal{M}(G)$. O conjunto E será formado pelas arestas do grafo e $\mathcal{I}$ será a família de subconjuntos de E tais que o grafo obtido pelas arestas de cada subconjunto não possui ciclos. Este matróide é conhecido como matróide de circuitos.

Dizemos que um conjunto X é independente maximal se $X \in \mathcal{I}$ e, para todo $\mathsf{e} \in E \setminus X$, tivermos $X \cup \mathsf{e} \notin \mathcal{I}$. Uma base de um matróide será um conjunto independente maximal e, na perspectiva de grafos, será uma árvore geradora. O conjunto formado por todas as bases de um matróde $\mathcal{M}$ será denotado por $\mathcal{B}(\mathcal{M})$.

Dois matróides $\mathcal{M}_1 = (\mathcal{B}_1, E_1)$ e $\mathcal{M}_2 = (\mathcal{B}_2, E_2)$ são isomorfos se, e somente se, existe uma bijeção $f : E_1 \to E_2$ tal que, se $B_1 \in \mathcal{B}_1$ então $f(B_1) \in \mathcal{B}_2$. Um grafo G é 2-isomorfo a um grafo H se H pode ser tansformado em um grafo isomorfo a G através de uma sequência de operações conhecidas como *vertex indentification*, *vertex cleaving* e *twisting.*

Teorema 1: [2] Sejam G e H grafos sem vértices isolados. Teremos que $\mathcal{M}(G)$ e $\mathcal{M}(H)$ são isomorfos se, e somente se, G e H são 2-isomorfos.

[1] brunasouza@ufrgs.br

2 Resultado em andamento

Em Teoria de Grafos, existe um problema clássico e de muito interesse que é a determinação de grafos. Um grafo G é dito determinado se existe um parâmetro λ bem definido que seja unicamente associado ao grafo. Dizemos que G é determinado por λ. Neste trabalho, utilizaremos como parâmetro as bases do matróide associado.

Em nosso trabalho, apresentaremos no Teorema 2 uma aplicação de um resultado clássico sobre matróides na determinação de uma família de grafos. Para isso, utilizaremos a operação entre dois grafos conhecida como *2-isomorfismo*.

Teorema 2: Seja G um grafo k-conexo de n vértices e m arestas. Para $k \geq 3$, temos que G é determinado pelo seu matróide de circuitos $\mathcal{M}(G)$.

Demonstração: Seja o grafo G k-conexo, para $k \geq 3$.
Suponhamos que existe um grafo H tal que $\mathcal{M}(G)$ e $\mathcal{M}(H)$ sejam isomorfos. Pelo Teorema 1, temos que G e H serão 2-isomorfos. Porém, para obtermos (spg) G a partir de H pelas operações que determinam o 2-isomorfismo, precisamos que, tanto G quanto H sejam, no máximo, 2-conexo. Caso contrário as operações de vertex identification, vertex cleaving e twisting não serão possíveis. Dessa forma, não havendo a possibilidade de obter o grafo H 2-isomorfo a G, temos que seus matróides não serão isomorfos. Dessa forma, podemos associar cada grafo $k - conexo$ para $k \geq 3$ a uma lista composta pelas bases dos seus matróides associados. Sabendo que os matróides não são isomorfos, teremos diferentes bases para cada matróide e, portanto, diferentes listas associadas aos grafos. $\square$

3 Conclusões

Tendo como objetivo central de estudo a determinação de grafos, acreditamos que os matróides podem ser uma potente ferramenta para determinar diferentes classes de grafos envolvendo outras com propriedades que não sejam apenas a conexidade. Para trabalhos futuros queremos investigar essas possíveis famílias e, também, pensar na determinação de grafos que não são contemplados com o resultado que apresentamos utilizando outros parâmetros matemáticos.

4 Reconhecimentos

Este trabalho foi desenvolvido sob orientação dos professores Vilmar Trevisan e Jorge Luis Ramírez Alfonsín durante a colaboração entre a Universidade Federal do Rio Grande do Sul e a Université de Montpellier.

Referências

[1] M. Las Vergnas, J. L. Ramírez Alfonsín. Théorie des Matroïdes - Nouvelles tendances et interactions. 2018.

[2] J. Oxley. Matroid Theory. Oxford Graduate Texts in Mathematics. 2011

