Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 7, n. 1, 2020.

Trabalho apresentado no XXXIX CNMAC, Uberlândia - MG, 2019.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Estudo Qualitativo da Dinâmica Contínua e Discreta da Equação Logística

Karen de Almeida Fonseca Rodrigues [1]
Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Mariana Gesualdi Villapouca[2]
Universidade do Estado do Rio de Janeiro

1 Introdução

A equação logística é um modelo criado para estudar o crescimento populacional de uma determinada espécie. O objetivo do presente trabalho é fazer um estudo geral do comportamento das soluções da equação diferencial logística, assim como descrever a dinâmica de sua análoga discreta, a equação de diferenças logística, por meio da dinâmica da família quadrática.

2 Equação Diferencial Logística

Vamos considerar, particularmente, o seguinte modelo logístico onde a taxa de crescimento populacional depende da população a cada instante.

$$\frac{dy}{dt} = (\rho - ay)y \tag{1}$$

onde y é a população no instante t, ρ é a taxa de crescimento populacional sem considerarmos qualquer outro fator e $a > 0$.

Fazendo a mudança de variáveis $K = \frac{\rho}{a}$, obtemos:

$$\frac{dy}{dt} = \rho y \left(1 - \frac{y}{K}\right) \tag{2}$$

Para compreendermos melhor o comportamento de y, analisamos o gráfico de $\frac{dy}{dt}$, que consiste em uma parábola de concavidade para baixo com raízes 0 e K. Concluímos então que y é constante em 0 e K, crescente para $0 < y < K$ e decrescente para $y > K$.

Com isso vimos que toda solução da equação (2) ou é identicamente 0 ou se aproxima de K em um período longo de tempo. Por isso chamamos K de capacidade de sustentação ambiental da população.

[1]karenafrodrigues@gmail.com
[2]mariana.villapouca@ime.uerj.br

 © 2020 SBMAC

3 Equação de Diferenças Logística

Em algumas situações o modelo discreto é mais natural e se mostra mais adequado para descrever um problema do que um modelo contínuo.

O caso discreto da equação logística é dado por

$$y_{n+1} = \mu y_n \left(1 - \frac{y_n}{K}\right) \tag{3}$$

obtida de (2) substituindo $\dfrac{dy}{dt}$ por $\dfrac{y_{n+1} - y_n}{h}$ com $\mu = 1 + \rho h$ e $k = \dfrac{1 + \rho h K}{\rho h}$.

Com uma mudança de escala na variável y_n obtém-se

$$x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n)\ ,\ x_n = \frac{y_n}{k} \tag{4}$$

4 A Família Quadrática

O comportamento das soluções da equação (4) é análogo ao comportamento das órbitas da função

$$F_\mu(x) = \mu x(1 - x) \tag{5}$$

que é definida em [1] como a família quadrática.

Podemos analisar o comportamento das órbitas de F_μ ao variarmos a taxa de crescimento μ. Para $0 < \mu < 1$, 0 será um ponto fixo atrator e $p_\mu = \dfrac{\mu - 1}{\mu}$ um ponto fixo repulsor, já para $1 < \mu < 3$ este comportamento se inverte. Para $\mu > 4$ a função se torna caótica.

5 Conclusão

Estudar qualitativamente as soluções da equação de diferenças logística é equivalente a estudar a dinâmica da família quadrática onde os pontos fixos de F_μ serão as soluções de equilíbrio, nos casos em que o ponto fixo é um atrator, a solução da equação será assintoticamente estável, caso seja um repulsor, a solução será assintoticamente instável. As mesmas propriedades caóticas também se apresentarão na equação de diferenças logísticas.

Esta equação foi estudada por Robert May em 1974 no estudo de uma população de insetos, onde ele sugeriu que a evolução da população se tornaria caótica caso a taxa de crescimento μ fosse muito elevada. [2]

Referências

[1] R. L. Devaney. *An introduction to chaotic dynamical systems, 2a edição*. Addison-Wesley Publishing Company, 1989.

[2] W. E. Boyce, R. C. DiPrima. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno, 9a edição*. John Willey and Sons, Inc, 2009.

© 2020 SBMAC