Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Um modelo não local logístico para dispersão de espécies

Patrícia Neves de Araújo [1]
Instituto de Matemática e Estatística - Universidade de São Paulo
Marcone Corrêa Pereira [2]
Instituto de Matemática e Estatística - Universidade de São Paulo

1 Introdução e objetivos

Os modelos de difusão não local têm sido amplamente utilizados em diversas áreas do conhecimento, como destacado em [1]. Aqui consideramos a classe de equações

$$\begin{cases} u_t(x,t) = D_\Omega u(x,t) + u(x,t)(a(x) - u(x,t)), & x \in \Omega, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

onde $(D_\Omega u)(x,t) = \int_\Omega J(x-y)(u(y,t) - u(x,t))dy$ é um operador não local, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado e $J \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ é uma função limitada, radial, não negativa com $\int_{\mathbb{R}^n} J(x)dx = 1$. Tal problema está relacionado à dinâmica de populações e pode ser visto como uma versão não local para o problema logístico muito utilizado em Biologia e Ecologia. A função $a(x)$ está associada às características do habitat e independe do tempo. Em [2] são estabelecidas condições para existência de um equilíbrio estável.

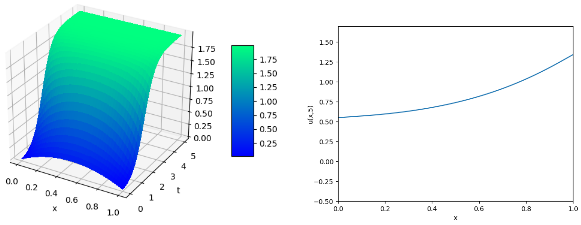
Teorema 1.1. *Se $a \in C^1(\Omega)$, $a(x) > 0$ em Ω e existe $\underline{u}(x)$ não negativa, independente de t tal que $D\underline{u} + \underline{u}(a - \underline{u}) \geq 0$ em Ω, então existe um único equilíbrio estritamente positivo e globalmente estável para (1) com convergência no sentido de convergência pontual.*

Observamos que a existência da subsolução não é imediata, exceto no caso em que a é uma constante positiva. Aqui, inicialmente simulamos a equação não local sob as hipóteses do Teorema (1.1) e posteriormente exploramos exemplos de funções $a \notin C^1(\Omega)$ e não estritamente positivas com o objetivo de verificar se podemos observar, nas simulações, resultados semelhantes ao caso em que a função a satisfaz as hipóteses do Teorema. Ilustraremos o comportamento das soluções com $J(x) = e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$, $\Omega = (0,1) \subset \mathbb{R}$ e condição inicial igual a $u_0(x) = x(1-x)$. Destacamos que se $a \in C^1(\Omega)$ e a é estritamente positiva em Ω, a convergência independe da escolha de u_0 [2].

[1] pnaraujo@ime.usp.br
[2] marcone@ime.usp.br

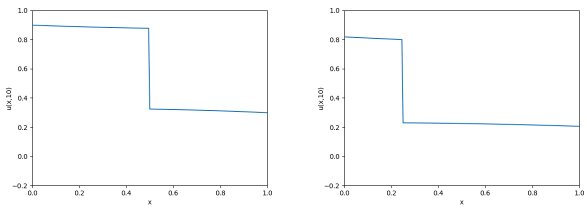
2 Desenvolvimento e análises

Nos dois primeiros exemplos, consideramos $a(x) \equiv 2$ e $a(x) = x^2 + 1/2$. Como podemos ver na figura (1(a)), se a é constante, a é o equilíbrio. Esse comportamento é idêntico ao caso da equação diferencial ordinária $\dot{u} = u(a - u)$. Na figura (1(b)), observamos que o equilíbrio no caso a não constante, não é igual a a, como esperado.



(a) $a \equiv 2$ (b) $a(x) = x^2 + 1/2$

Vemos a seguir o perfil dos equilíbrios em dois casos em que a é da forma $a(x) = 1$, se $x \in (0, c)$, ou $a(x) = 0$ se $x \in (c, 1)$. Aqui tomamos $c = 1/2$ e $c = 1/4$.



(c) $c = 1/2$ (d) $c = 1/4$

Estes problemas apresentam equilíbrios estáveis e concluímos então que existem casos em que é possível obter resultados semelhantes aos do Teorema (1.1) mesmo se $a \notin C^1(\Omega)$ e não é estritamente positiva. Nestas condições o equilíbrio é melhor visualizado a partir de $t = 10$, logo a convergência é mais lenta do que no caso em que $a \in C^1(\Omega)$ e $a(x) > 0$ em Ω, no qual a convergência é visível a partir de $t = 4$.

Agradecimentos

A primeira autora obteve apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001 e o segundo de FAPESP 2017/02630-2 e CNPq 303253/2017-7.

Referências

[1] P. Fife, Some non classical parabolic and parabolic-like evolution problems *Trends in nonlinear analysis*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2003.

[2] V. Hutson, S. Martinez, K. Mischaikov and G. T. Vickers. The evolution of dispersal, *J. Math. Biol. 47, 43-517*, 2003.

