Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 7, n. 1, 2020.

Trabalho apresentado no XXXIX CNMAC, Uberlândia - MG, 2019.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

O Modelo SIR para Escalas Temporais

Patrick Oliveira[1]
Departamento de Matemática, UFJF, Minas Gerais, Brasil
Lucy Tiemi Takahashi[2]
Departamento de Matemática, UFJF, Minas Gerais, Brasil
Eduard Toon[3]
Departamento de Matemática, UFJF, Minas Gerais, Brasil

1 Introdução: A Modelagem em Escalas Temporais

As equações diferenciais (ED) são amplamente utilizadas na modelação de doenças e suas peculiaridades. Neste trabalho estamos interessados em discutir o modelo matemático de doenças que se caracterizam pela existência de três subpopulações: a dos infectados pela doença e que podem transmiti-la, a dos suscetíveis que podem vir a ser infectados e a dos removidos, que podem ser indivíduos vacinados que adquiriram imunidade perene à doença, ou aqueles que após contraí-la se recuperaram e tornaram-se imunes. Tal modelo é chamado de SIR. Pela análise qualitativa deste modelo temos uma compreensão da dinâmica da doença.

Contudo, na teoria clássica das ED's trata-se o passar do tempo de forma contínua, mas as variações, e até a dinâmica, observadas em problemas biológicos ocorrem muitas vezes em intervalos de tempo contínuos agregados a tempo discreto. Dessa forma, realizamos o estudo de ED's em Escalas Temporais, onde podemos tratar a passagem do tempo de forma mais flexível, o que faz a solução corresponder mais fidedignamente à realidade.

O uso de Escalas Temporais permite, por exemplo, "desconsiderarmos"períodos de tempo em que uma doença fica inativa, ou quando a bactéria que causa uma doença entra em processo de esporulação, ou ainda quando é baixa estação para o vetor de alguma doença.

Neste trabalho, apresentamos uma análise dos principais resultados obtidos por Martin *et al.*, em [2], onde é apresentado um modelo SIR com parâmetros constantes e tempo contínuo num subconjunto fechado e não-vazio dos números reais, chamado de Escala Temporal, $\mathbb{T}$. Apresentando sua solução explícita assim como os principais resultados que dizem respeito ao comportamento à longo prazo da sua solução. Ainda, o aplicamos em uma Escala Temporal mista, que mistura pontos discretos e intervalos fechados.

[1]patrickoliveira@ice.ufjf
[2]ltiemi@gmail.com
[3]edutoon@gmail.com

2 O Modelo SIR em $\mathbb{T}$

Definimos um sistema SIR:

$$\begin{cases} S^{\triangle} &= -\beta \dfrac{SI^{\sigma}}{S+I} \\ I^{\triangle} &= \beta \dfrac{SI^{\sigma}}{S+I} - \gamma I^{\sigma} \\ R^{\triangle} &= \gamma I^{\sigma}, \end{cases} \tag{1}$$

onde, $\triangle$ indica a delta derivada em $\mathbb{T}$, σ indica a composição com o operador avanço da escala e para $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ temos os modelos clássicos de SIR. A análise do modelo (1), como vemos em [2], passa pela análise das constantes positivas β e γ, que representam as taxas de infecção e de recuperação da doença, respectivamente. A maior taxa implica no comportamento geral da solução. Caso a taxa de recuperação seja maior que a de infecção, a população I de infectados decresce tendendo à 0. Caso contrário, a população S de suscetíveis é quem tende à 0.

A seguir, vemos na Figura 1 a plotagem das funções S, I e R para $\mathbb{T} = [0, 12] \cup \{13, 14, \ldots, 24\}$, com $\beta = 0,4$, $\gamma = 0,2$ e a condição inicial $(S_0, I_0, R_0) = (0,8,\ 0,2,\ 0)$.

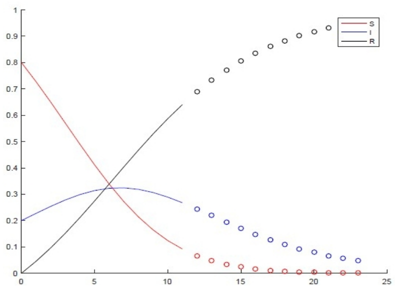

Figura 1: Gráfico das subpopulações S, I e R do sistema (1), para $\mathbb{T} = [0, 12] \cup \{13, 14, \ldots, 24\}$, com $\beta = 0,4$, $\gamma = 0,2$ e a condição inicial $(S_0, I_0, R_0) = (0,8,\ 0,2,\ 0)$.

Agradecimentos

À CAPES e a PROPP/UFJF pelo apoio financeiro.

Referências

[1] M. Bohner, A. Peterson. *Dynamic Equations on Time Scales: An introduction with applications*. Springer Science and Business Media, 2012.

[2] M. Bohner, S. Streitpert and D. F. M. Torres. Exact Solution to a Dynamic SIR Model, *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 32:228-238, 2019. DOI: 10.1016/j.nahs.2018.12.005.

