Trabalho apresentado no XXXIX CNMAC, Uberlândia - MG, 2019.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

A teoria Termoelástica de Green-Naghdi

Henrique Mascalhusk[1]
Curso de Física Computacional, UFF, Volta Redonda, RJ
Gilmar Garbugio[2]
Departamento de Matemática, Instituto de Ciências Exatas, UFF, Volta Redonda, RJ

1 Introdução

A termoelasticidade clássica tem como fundamento a teoria da elasticidade juntamente com a lei de Fourier para a condução de calor sobre uma amostra. Com uso da lei de Fourier e da equação de energia é possível escrever uma equação diferencial parcial (EDP) do tipo parabólica que resulta em um paradoxo de propagação com velocidade infinita dos sinais térmicos. Com o intuito de resolver o paradoxo, Catanneo [2] propôs uma mudança na lei de Fourier levando assim a uma equação diferencial parcial do tipo hiperbólica a qual elimina o paradoxo. Diversos autores trabalharam nestas teorias termoelásticas hiperbólicas, dentre estes, podemos citar Lord-Schulman, Green-Lindsay e Green-Naghdi [1, 3]. Neste trabalho desenvolveremos a teoria proposta por Green e Naghdi.

2 Desenvolvimento do trabalho

A teoria termoelástica proposta por Green-Naghdi tem como base três tipos de fluxo de calor, denotados por tipo I, II e III. Para o fluxo de calor do tipo I, seja η a entropia, r a taxa de calor externa e q o fluxo de calor, então o balanço de entropia é dada por

$$\rho\theta\dot{\eta} = \rho r - (\nabla \cdot q). \tag{1}$$

Considere ψ a energia livre de Helmholtz, e assumindo as seguintes relações

$$\psi = c(\theta - \theta \ln \theta), \quad \eta = c \ln \theta, \quad q = -k\nabla\theta, \tag{2}$$

sendo k a condutividade térmica, c o calor específico do material e θ a temperatura absoluta. Seja ρ a densidade do material e combinando (2) e (1), obtemos a seguinte equação diferencial parcial:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{k}{\rho c}\nabla^2\theta. \tag{3}$$

[1]hmascalhusk@id.uff.br
[2]gilmarg@id.uff.br

 © 2020 SBMAC

A equação (3) é uma equação diferencial parcial do tipo parabólica, levando a um paradoxo clássico conhecido cuja velocidade de propagação dos sinais térmicos é infinita.

Para o fluxo do tipo II, considere o deslocamento termal α dada pela seguinte equação:

$$\alpha = \int_{t_0}^{t} T(X,\tau)d\tau + \alpha_0, \tag{4}$$

onde $\alpha_0 = \alpha(t_0)$, T é a temperatura empírica, que por simplicidade podemos supor que coincide com a temperatura absoluta θ e X representa o vetor posição na configuração de referência.

Seja $\beta = \frac{\partial\alpha}{\partial X}$ e τ_0 é o termo de relaxação, as relações para ψ, η e q_i são dadas por:

$$\psi = c(\theta - \theta \ln \theta) + \frac{1}{2}\beta \cdot \beta, \quad \eta = c \ln \theta, \quad (1 + \tau_0 \frac{\partial}{\partial t})q = -k\nabla\theta. \tag{5}$$

Combinando-se (5) com (1), obtemos a seguinte EDP:

$$\tau_0 \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} + \frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{k}{\rho c}\nabla^2\theta. \tag{6}$$

A equação (6) é uma EDP hiperbólica não homogênea com um termo de dissipação e possui velocidade de propagação finita.

3 Conclusão

Em linhas gerais, mostramos que a natureza parabólica da equação (3) implica que para qualquer pertubação térmica e algum ponto do corpo fará com que essa pertubaão seja sentida instantaneamente em todo o corpo. Concluímos com o auxílio da equação (6), que é do tipo hipérbólica, ser possível remover o paradoxo de propagação dos sinais térmicos e mostra o comportamento da temperatura como uma equação do tipo onda, cuja velocidade de propagação é dada por $v = \sqrt{\frac{k}{\rho c \tau_0}}$.

Referências

[1] S. Bargman, A. Favata, P. P. Guidugli. A revised exposition of the Green-Naghdi Theory of Heat Propagation, *Journal of Elasticity* 114:143–154, 2014. DOI: 10.1007/s10659-013-9431-8.

[2] D. S. Chandrasekharaiah, Hyperbolic thermoelasticity: A review of recent literature, *Appl. Mec. Rev*, 51:705–729, 1998. DOI:10.1115/1.3098984.

[3] A. E. Green, P. M. Naghdi. A re-examination of the basic postulates of thermomechanics, *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, 432:171–194, 1991. DOI: 10.1098/rspa.1991.0012.

© 2020 SBMAC