

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Um estudo de quantificação de incertezas e análise de sensibilidade de funções de fluxo fracionário da equação de Buckley-Leverett

Andrés Valdez¹, Rodrigo Weber dos Santos, Grigori Chapiro, Bernardo M. Rocha
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional
Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, MG, Brazil

Resumo. Uma das equações mais utilizadas para descrever o escoamento bifásico de meios porosos em reservatórios é a equação de Buckley-Leverett. Este modelo é definido em conjunto a uma função de fluxo fracionário, a qual define diferentes regimes de escoamento. Neste trabalho, um grupo de modelos para a descrição da permeabilidade relativa, as quais compõem o fluxo fracionário, para água e óleo (ou água e gás) são estudados com relação a incertezas presentes nos parâmetros que definem estes modelos. A solução da equação de Buckley-Leverett é então analisada considerando-se a propagação de incertezas nos seus dados de entrada e verificando-se o efeito em quantidades de interesse relevantes. Além disso, realiza-se uma análise de sensibilidade dos modelos quando estes são tratados com incertezas. Os resultados desse trabalho mostram quais os parâmetros dos modelos de permeabilidade relativa considerados possuem mais impacto na saída das simulações.

Palavras-chave. Buckley-Leverett, permeabilidade relativa, quantificação de incertezas.

1 Introdução

A modelagem da dinâmica de petróleo em reservatórios tem sido um grande desafio para engenheiros, matemáticos e cientistas. Nesse contexto, são grandes as dificuldades de se realizar medidas e experimentos físicos nos reservatórios a fim de se obter informações sobre o mesmo. Isso resulta em erros e incertezas nas medidas de dados que são utilizadas para simulações computacionais, as quais são comumente utilizadas para previsão e tomada de decisão. Logo, é importante analisar o efeito das incertezas em dados usados para simulações nas quantidades de interesse utilizadas na tomada de decisão. Além disso, deve-se conhecer nos modelos matemáticos utilizados quais são os parâmetros mais influentes do modelo.

Nesse trabalho considera-se o escoamento multifásico em meios porosos considerando a dinâmica água-óleo no reservatório. Para descrever este fenômeno o modelo matemático de Buckley-Leverett (BL) [1] será considerado como uma simplificação das leis de conservação de escoamento bifásico. Serão abordados diferentes formulações para a permeabilidade relativa que compõe a função fluxo fracionário do modelo de BL. Nesse contexto, os diferentes modelos de permeabilidade relativa possuem diferentes parâmetros que serão

¹arvaldez@ice.ufjf.br

analisados para o efeito da propagação de incerteza na solução do modelo. O objetivo é entender melhor esses modelos, suas diferenças e características em comum, além de permitir identificar quais parâmetros influenciam mais na saída produzida pela simulação do problema. Dessa forma, pode-se identificar quais parâmetros podem ser mantidos fixos, sem alterar de forma significativa a solução, e quais parâmetros precisam de mais cuidado em medições e na entrada de dados para simulações.

2 Modelo matemático

A equação de Buckley-Leverett [1] representa leis de conservação para o transporte multifásico de espécies como água e óleo em um meio poroso. O modelo de BL é obtido a partir das equações de leis de conservação apropriadas [1] e considerando uma série de hipóteses simplificadoras, tais como: os fluidos (água e óleo) são incompressíveis e imiscíveis; o meio poroso é saturado; e as variações dos efeitos capilares são negligenciadas.

Nesse trabalho o meio poroso é representado por um domínio unidimensional Ω e o problema de valor de contorno e inicial pode ser escrito como: dado uma função que representa a fonte de água q_w , encontrar em qualquer instante de tempo t em $[0, T]$, a saturação da água S_w , que representa o volume de água ocupado, tal que:

$$\begin{cases} \phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}(f) = q_w & \text{em } \Omega \times [0, T], \\ u = -\kappa \lambda_T \frac{\partial}{\partial x}(p_w) & \text{em } \Omega \times [0, T], \end{cases} \quad (1)$$

onde ϕ é a porosidade que descreve a relação de espaços vazios no domínio. A velocidade de Darcy u é definida em termos da pressão da fase água p_w e da permeabilidade efetiva do meio poroso, denotada por κ . Além disso, f é uma função denominada fluxo fracionário dada por:

$$f = \frac{\kappa_{rw}}{\kappa_{rw} + \left(\frac{\mu_w}{\mu_o}\right) \kappa_{ro}}, \quad (2)$$

onde os coeficientes κ_{rw} e κ_{ro} representam a permeabilidade relativa da água e óleo, respectivamente; e o par μ_w e μ_o representam as viscosidades da água e do óleo. O coeficiente λ_T na Equação (1) representa a mobilidade total e é dado por $\lambda_T = \kappa_{rw}/\mu_w + \kappa_{ro}/\mu_o$.

É importante lembrar que as hipóteses consideradas, implicam nas seguinte relações para saturação $S_w + S_o = 1$ e para pressão: $p_c = p_o - p_w = \text{constante}$. Além disso o problema BL deve ser complementado com condições iniciais e de contorno adequadas.

3 Formulações para a permeabilidades relativas

Nesse trabalho, serão investigadas diferentes formulações que foram propostas e apresentadas na literatura para as permeabilidades relativas da água e do óleo, isto é, para k_{rw} e k_{ro} . Em particular, serão estudados os modelos propostos por Corey-Brooks [4], Chierici [5], Lomeland *et al.* [7] e o modelo mais clássico conhecido como modelo *quadrático* [1].

Modelo quadrático. Esse modelo consiste em uma aproximação polinomial de segunda ordem para as permeabilidades relativas da água e do óleo como funções da saturação da fase água [1]. O modelo é dado pelas seguintes expressões:

$$\kappa_{rw}(S_w) = \kappa_w^0 S_{we}^2, \quad \kappa_{ro} = \kappa_o^0 (1 - S_{we})^2, \quad (3)$$

onde os parâmetros κ_w^0 e κ_o^0 representam os valores máximos da permeabilidade relativa de água e óleo; S_{we} representa a saturação da água efetiva em termos da saturação da água teórica S_w e a saturação da água residual S_{w0} , as quais se relacionam por: $S_{we} = (S_w - S_{w0}) / (1 - S_{w0})$.

Modelo de Corey. O modelo proposto por Corey [4] permite ajustar a aproximação polinomial em termos de parâmetros físicos como o índice de distribuição de tamanhos de poros do meio (*pore size index*), representado por λ . Este modelo é dado por:

$$\kappa_{rw}(S_w) = \kappa_w^0 S_{we}^\varepsilon, \quad \kappa_{ro} = \kappa_o^0 (1 - S_{we})^2 (1 - S_{we}^\gamma), \quad (4)$$

onde os coeficientes ε e γ são definidos como: $\varepsilon = (2 + 3\lambda) / \lambda$ e $\gamma = (2 + \lambda) / \lambda$. Portanto, considerando κ_w^0 , κ_o^0 e λ , esse modelo possui 3 parâmetros.

Modelo de Chierici. O modelo de Chierici [5] considera uma aproximação exponencial para as funções de permeabilidade relativa da água e óleo. O modelo é dado por:

$$\kappa_{ro} = \kappa_o^0 \exp(-A S_{wc}^L), \quad \kappa_{rw}(S_w) = \kappa_w^0 \exp(-B S_{wc}^{-M}), \quad (5)$$

onde $S_{wc} = (S_w - S_{w0}) / (1 - S_w)$. O modelo depende κ_w^0 e κ_o^0 , além de quatro coeficientes positivos $\{A, B, L, M\}$, os quais não possuem interpretação física.

Modelo LET. Um dos modelos mais recentes e flexíveis, proposto em 2005 por Lomeland *et al.*, considera uma aproximação racional para as permeabilidades. O modelo LET é definido por:

$$\kappa_{rw}(S_w) = \kappa_w^0 \frac{S_{we}^{L_w}}{S_{we}^{L_w} + E_w (1 - S_{we})^{T_w}}, \quad \kappa_{ro} = \kappa_o^0 \frac{(1 - S_{we})^{L_o}}{(1 - S_{we})^{L_o} + E_o S_{we}^{T_o}}. \quad (6)$$

Os coeficientes do modelo LET $\{L_w, E_w, T_w\}$ e $\{L_o, E_o, T_o\}$ para permeabilidade relativa da água e óleo são utilizados para definir diferentes partes da curva de permeabilidade; mais detalhes podem ser encontrados em Moghadasi *et al.* [7].

4 Métodos

A seguir serão apresentados os métodos utilizados para resolver a Equação (1), assim como os procedimentos adotados para análise de quantificação de incerteza e sensibilidade.

4.1 Solução da equação de Buckley-Leverett

As soluções da Equação (1) combinada com os diversos modelos de fluxo fracionário, dados pelas Equações (3)-(6), foram obtidas de forma exata utilizando o *método da características* conhecido dentro da teoria de fluxo fracionário [3], descrita por Welge [8]. Nesse sentido o ponto de equilíbrio denotado como *ponto de Rankine-Hugoniot* é determinado utilizando o método de Newton para resolver equações não-lineares, [1].

4.2 Quantificação de incertezas e análise de sensibilidade

Seja um conjunto de entradas com incertezas (ou estocástico) representadas por $\beta = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_D\}$, as quais são variáveis aleatórias contínuas com função densidade de probabilidade ρ_i . A solução do modelo matemático de interesse (Equação 1) é representada por uma função f que fornece dados de saída estocásticos, a partir dos quais são definidas quantidades de interesse \mathcal{Y}_i . Essa relação pode ser definida como $\mathcal{Y} = f(\beta)$, onde os dados de entrada com incerteza podem representar diferentes parâmetros. Note que \mathcal{Y} também é considerada uma variável aleatória. Nesse trabalho, considerou-se que todos os parâmetros são independentes.

Para caracterizar os dados de saída \mathcal{Y} que resulta de f considerando dados de entrada com incerteza β_i serão usados momentos estatísticos como o valor esperado, variância e desvio padrão. O valor esperado e a variância de \mathcal{Y} são dados por

$$\mathbb{E}[\mathcal{Y}] = \int_{\Omega_{\mathcal{Y}}} y \rho_{\mathcal{Y}}(y) dy, \quad \mathbb{V}[\mathcal{Y}] = \int_{\Omega_{\mathcal{Y}}} (\mathbb{E}[\mathcal{Y}] - y)^2 \rho_{\mathcal{Y}}(y) dy. \quad (7)$$

onde $\Omega_{\mathcal{Y}}$ é o espaço amostral e $\rho_{\mathcal{Y}}$ é a função densidade de probabilidade de \mathcal{Y} .

Com o objetivo de se estudar o efeito das incertezas dos parâmetros de entrada na variância das quantidades de interesse \mathcal{Y} , uma análise de sensibilidade baseada no índices de sobol foi realizada. A análise de sensibilidade segue a mesma linha descrita no trabalho de Eck *et al.* [6]. Os índices de Sobol (principal e total) informam o quanto poderia se reduzir da variância da quantidade de interesse ao se reduzir a variabilidade de um ou mais parâmetros de entrada do modelo. Para o parâmetro de entrada β_i , os índice principal e total são definidos, respectivamente como:

$$S_i = \frac{\mathbb{V}[\mathbb{E}[\mathcal{Y}|\beta_i]]}{\mathbb{V}[\mathcal{Y}]}, \quad S_{Ti} = 1 - \frac{\mathbb{V}[\mathbb{E}[\mathcal{Y}|\beta_{-i}]]}{\mathbb{V}[\mathcal{Y}]} \quad (8)$$

Nesse trabalho a quantidade de interesse considerada será o tempo de chegada da água denotado por t_{wbt} , deslocante ao poço produtor, também conhecido como tempo de *breakthrough*.

4.3 Expansão em polinômio de caos

Nesse trabalho soluções estocásticas são consideradas através de um polinômio ortogonal que depende das entradas com incertezas. O método do polinômio de caos generalizado

foi utilizado [6], sendo que a quantidade de interesse \mathcal{Y} é aproximada por

$$\bar{\mathcal{Y}}(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^P b_i \Phi_i(\boldsymbol{\beta}), \quad (9)$$

onde b_i são os coeficientes e Φ_i são polinômios ortogonais em termos das variáveis aleatórias. Para um polinômio de grau g e N variáveis aleatórias, o número de termos P é dado por $P = (N + g)!/N!g!$.

Para determinar os coeficientes b_i da expansão polinomial definida na Equação (9) o método da colocação probabilístico foi utilizado, ([6]). Esse método requer que a expansão polinomial seja igual à avaliação do modelo em um número de pontos de colocação, o que resulta em um sistema de equações lineares cuja solução determina os coeficientes. Com ordem polinomial g , o número mínimo de amostras N_p é dado por: $N_p = (N + g)!/(g!N!)$. O sistema pode ser resolvido com N_p pontos de colocação, mas em geral um sistema sobre-determinado com mais do que N_p pontos resulta em melhores aproximações [2]. Nesse trabalho a biblioteca *ChaosPy* desenvolvida por Feinberg e Langtangen [2] foi utilizada para essas análises.

5 Experimentos Computacionais

As simulações utilizaram os seguintes parâmetros: viscosidade da água e óleo fixadas em $\mu_w = 0.97$ e $\mu_o = 1.74$, respectivamente. A porosidade do meio poroso foi considerada como $\phi = 1$ (eliminando a variável ϕ do modelo BL). As condições iniciais impostas sobre a saturação da água no poço injector são dadas por $S_w(0, t) = 1$.

Para os parâmetros das permeabilidades relativas considerou-se o conjunto de dados conhecido como Sand-Pack [7]. Em todos os experimentos, por simplicidade e falta de conhecimentos das distribuições associadas aos parâmetros de entrada, foi considerada a distribuição de probabilidade uniforme. Um coeficiente de variação de 15% foi adotado igualmente para todos os parâmetros a fim de determinar os limites superior e inferior da mesma. A Tabela 1 apresenta os parâmetros de cada modelo e os seus respectivos valores médios.

Tabela 1: Parâmetros de entrada utilizando distribuição uniforme.

Modelo	Parâmetro	Média
Todos	$\{\kappa_w^0, \kappa_o^0\}$	$\{0.53, 0.78\}$
Corey	λ	0.88
Chierici	$\{A, B, L, M\}$	$\{0.87, 3.21, 0.84, 0.86\}$
LET	$\{L_w, E_w, T_w, L_o, E_o, T_o\}$	$\{4.02, 2, 0.41, 1, 1.18, 1.28\}$

5.1 Calibração do modelo

A precisão do modelo estocástico $\bar{\mathcal{Y}}$ criado para quantificação de incertezas e análise de sensibilidade foi verificado avaliando a convergência dos índices de Sobol, como descrito

em [6]. Basicamente, foi escolhido um grau polinomial g e número de amostras N_p para que o erro relativo entre os índices de Sobol fosse pequeno e satisfatório.

Em particular, nesse trabalho adotou-se grau polinomial $g = 3$ e um número de amostras $N_s = 4N_p$ para todos os modelos. Com essa escolha, os erros relativos em termos dos índices de Sobol principal e total, para todos os modelos foi menor do que $4 \times 10^{-2}\%$.

5.2 Resultados

A Tabela 2 mostra os resultados da análise de quantificação de incertezas no tempo de chegada da água para diferentes modelos. Nesta tabela apresenta-se o valor esperado (média), desvio padrão (DP) e o coeficiente de variação (COV). Observa-se que o modelo de Corey apresenta o menor valor de COV, enquanto os modelos quadrático, Chierici e LET tem COV's com igual ordem de magnitude.

Tabela 2: Propagação de incertezas na quantidade de interesse tempo de chegada da água.

Modelo	Média	DP	COV
Quadrático	6.418e-01	1.301e-02	2.027e-02
Corey	6.857e-01	6.179e-03	9.011e-03
Chierici	7.713e-01	1.022e-02	1.325e-02
LET	7.605e-01	6.156e-02	8.713e-02

A análise de sensibilidade para esses modelos realizada para t_{wbt} é apresentada na Figura 1. Dos resultados, fica claro que os parâmetros κ_w^0 e κ_o^0 para o modelo quadrático e de Corey, possuem igual efeito no tempo de chegada da água. Em particular, no modelo de Corey o parâmetro λ mostrou ter mais impacto. Por outro lado, para os modelos Chierici e LET, os parâmetros L e L_o , respectivamente, que são os expoentes da permeabilidade relativa do óleo, se mostraram significativamente como os mais influentes dentre todos.

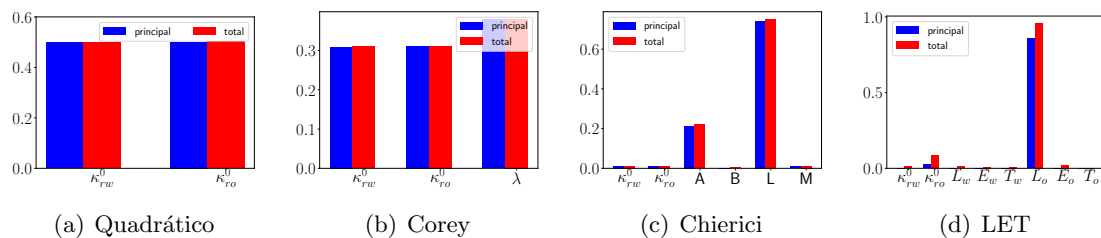


Figura 1: Índices de Sobol (principal e total) para o tempo de chegada da água (t_{wbt}).

6 Conclusões

Este trabalho apresentou um estudo de quantificação de incertezas e análise de sensibilidade para o problema de Buckley-Leverett considerando diferentes modelos da literatura para as permeabilidades relativas. O estudo considerou apenas a quantidade de interesse

tempo de chegada da água e para todos os modelos analisados verificou-se quais foram os parâmetros de entrada mais influentes. Nos modelos mais complexos como de Chierici e LET constatou-se que o expoente presente na permeabilidade relativa do óleo é o que mais impacta no tempo de chegada. Em trabalhos futuros pretende-se incluir novas quantidades de interesse nessa análise (como por exemplo a curva de produção) e outros aprimoramentos como a possibilidade de considerar campos estocásticos utilizando a expansão de Karhunen-Loeve. Por fim, estudos semelhantes serão realizados para o caso de permeabilidade relativas de água e gás.

Agradecimentos

Este trabalho foi realizado em associação com o projeto de P&D registrado como ANP 20715-9, *Modelagem matemática e computacional de injeção de espuma usada em recuperação avançada de petróleo* (Universidade Federal de Juiz de Fora - UFJF / Shell Brasil / ANP). Modelagem computacional e matemática da injeção de espuma como uma técnica de recuperação avançada aplicada aos reservatórios de pré-sal do Brasil, apoiado pela Shell Brasil sobre o ANP P&D como *Compromisso de Investimentos com Pesquisa e Desenvolvimento*. Este projeto foi realizado em parceria com a Petrobras.

Referências

- [1] Jacob Bear. *Modeling Phenomena of Flow and Transport in Porous Media*. Springer International Publishing, 2018.
- [2] J. Feinberg e H. P. Langtangen. Chaospy: An open source tool for designing methods of uncertainty quantification. *Journal of Computational Science*, 2015.
- [3] E. Ashoori, D. Marchesin e W.R. Rossen. Roles of Transient and Local Equilibrium Foam Behavior in Porous Media–Traveling Wave. *Colloids and Surfaces A: Physicochem. Eng. Aspects*, 2011.
- [4] R. H. Brooks e A. T. Corey. *Hydraulic properties of porous media*, Hydrology papers no. 3, Fort Collins, Colorado : Colorado State University, 1964.
- [5] G.L. Chierici. Novel relations for drainage and imbibition relative permeabilities. *Society of Petroleum Engineers Journal*, 24, 1984.
- [6] V.G. Eck, W.P. Donders, J. Sturdy, J. Feinberg, T. Delhaas, L.R. Hellevik, W. Huberts. A guide to uncertainty quantification and sensitivity analysis for cardiovascular applications. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, 2016.
- [7] L. Moghadasi, A. Guadagnini, F. Inzoli, M. Bartosek. Interpretation of two-phase relative permeability curves through multiple formulations and model quality criteria. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 2015.
- [8] H.J. Welge. A simplified method for computing oil recovery by gas or water drive. *Journal of Petroleum Technology*, 1952.