Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 7, n. 1, 2020.

Trabalho apresentado no XXXIX CNMAC, Uberlândia - MG, 2019.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

A Teoria da Invexidade Aplicada ao Problema de Corte de Estoque Biobjetivo

Jennifer Cristina Borges [1]
Socorro Rangel [2]
Universidade Estadual Paulista-UNESP, São José do Rio Preto-SP
Luiz Leduino de Salles Neto [3]
Universidade Federal de São Paulo, São José dos Campos-SP

Resumo Neste trabalho utilizamos conceitos de invexidade para provar resultados de otimalidade parcial para o problema de corte de estoque biobjetivo (minimização do número total de objetos cortados e minimização do número total de ciclos da serra). Essa abordagem permite estabelecer conexões entre otimização discreta e otimização contínua multiobjetivo.
Palavras-chave. Problema de corte de estoque, Otimização multiobjetico, Invexidade

1 Introdução

O Problema de Corte de Estoque (PCE) consiste em determinar como cortar um conjunto de objetos grandes em estoque (todos de mesma dimensão e espessura t) para produzir um conjunto de m itens menores para cumprir uma demanda d_i para cada item i, $i = 1, \ldots, m$. Cada combinação de itens em um objeto, respeitando as condições de não sobreposição e limites físicos do objeto, é chamada de padrão de corte e pode ser representada por vetor coluna A_j, de dimensão m em que cada elemento a_{ij} é o número de itens do tipo i no padrão j. Considerando que são conhecidos n padrões de corte, definimos $x_j, j = 1 \ldots n$, como o número de objetos grandes cortados de acordo com o padrão de corte j. O critério usual para o PCE é a minimização do número total de objetos cortados para atender a demanda dos itens. No entanto, no contexto de aumento da produtividade do equipamento de corte [6], é importante considerar dois outros critérios que estão em conflitos com esse: a minimização do número total de preparos da máquina e a minimização do número de ciclos da serra. Um ciclo da serra representa toda a operação da máquina de corte para cortar um ou mais objetos simultaneamente. Se o excesso de demanda for aceito, um melhor uso da capacidade da serra pode resultar no aumento do número de objetos cortados. Dada a altura da serra, h, o número máximo de objetos que podem ser empilhados na máquina e cortados simultaneamente é: $c = \lfloor \frac{h}{t} \rfloor$(Capacidade da

[1]jennifer.borges@unesp.br
[2]socorro.rangel@unesp.br
[3]luiz.leduino@unifesp.br

DOI: 10.5540/03.2020.007.01.0347

serra). Considerando então, os critérios para tomada de decisão como sendo, minimizar o número total de objetos cortados ($\psi_1(x)$), minimizar o número total de preparos ($\psi_2(x)$) e minimizar o número total de ciclos da serra ($\psi_3(x)$), podemos representar o problema através do modelo matemático multiobjetivo (MPCE).

$$\psi_1(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j, \quad \psi_2(x) = \sum_{j=1}^{n} \delta(x_j), \text{ com } \delta(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{se } x_j > 0 \\ 0, & \text{se } x_j = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \psi_3(x) = \sum_{j=1}^{n} \left\lceil \frac{x_j}{c} \right\rceil$$

$$\begin{array}{lll} (MPCE) & min & \psi(x) = (\psi_1(x), \psi_2(x), \psi_3(x)) \\ & s.a. & \sum_{j=1}^{n} A_j x_j \geqslant d, \\ & & x_j \in \mathbb{N}, \quad i = 1, \ldots, m. \end{array}$$

2 Problema auxiliar para ($BPCE_c$)

Uma das dificuldades em se resolver o problemas (MPCE) é o fato das funções $\psi_2(x)$ e $\psi_3(x)$ não serem contínuas. Em [2] foi estudado o problema PCE biobjetivo (BPCE) considerando os objetivos $\psi_1(x)$ e $\psi_2(x)$, e foram usados resultados de invexidade e uma suavisação da função $\psi_2(x)$ para determinar a qualidade de uma solução factível para o problema (BPCE). No presente trabalho, extendemos esses resultados para tratar do PCE biobjetivo considerando os objetivos $\psi_1(x)$ e $\psi_3(x)$ ($BPCE_c$). Inicialmente, propomos a função contínua $\varphi_3(x)$ definida em (1) e mostramos na Proposição 2.1 que, considerando parâmetros adequados, $\varphi_3(x)$ é uma boa aproximação para $\psi_3(x)$ considerando que o critério de otimização é de minimização.

$$\varphi_3(x) = \sum_{j=1}^{n} \phi(x_j) \tag{1}$$

em que $\forall M \in \mathbb{R}, M > 0$, $\phi(x_j) = \begin{cases} 0, & x_j < 0 \\ (M+1)sen^2(\pi x_j), & 0 \leqslant x_j < \frac{1}{2} \\ cx_j + (M)sen^2(\pi x_j), & x_j \geqslant \frac{1}{2} \end{cases}$.

Proposição 2.1. *Para $x \in \mathbb{N}^n$ e M suficientemente grande, $min\ \varphi_3(x) = min\ \psi_3(x)$.*

Demonstração. Note que: $\min \varphi_3(x) = \sum_{j=1}^{n} \min \phi(x_j)$. Fazendo $x_j = t$, calculando a derivada, e usando identidades trigonométricas obtemos os pontos críticos de $\phi(t)$: t_0, t_1 e t_2 (2).

$$t_0 = 0, \quad t_1 = \frac{2\pi k - sen^{-1}\left(\frac{c}{M\pi}\right)}{2\pi}, k \in \mathbb{Z}_+ \text{ e } t_2 = \frac{2\pi k + \pi + sen^{-1}\left(\frac{c}{M\pi}\right)}{2\pi}, k \in \mathbb{Z}_+ \tag{2}$$

Avaliando os pontos críticos na segunda derivada temos que i) t_0 e t_1 são pontos de mínimo e ii) t_2 é ponto de máximo. O valor da função nos pontos de mínimo são: $\phi(t_0) = 0$

DOI: 10.5540/03.2020.007.01.0347

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics. v. 7, n. 1, 2020.

e:

$$\phi(t_1) \quad = \quad c\left(\frac{2k\pi - sen^{-1}\left(\frac{c}{M\pi}\right)}{2\pi}\right) + Msen^2\left(\frac{2k\pi - sen^{-1}\left(\frac{c}{M\pi}\right)}{2}\right).$$

Vamos analisar o comportamento da expressão $sen^{-1}\left(\frac{c}{M\pi}\right)$ para M suficientemente grande. Usando a continuidade da função sen^{-1} temos que:

$$\lim_{M\to\infty} sen^{-1}\left(\frac{c}{M\pi}\right) = sen^{-1}\left(\lim_{M\to\infty}\frac{c}{M\pi}\right) = sen^{-1}0 = 0. \tag{3}$$

Portanto para valores de M suficientemente grandes temos que $\min\ \phi(t)$ é suficientemente próximo de ck. Isto é, para $k \in \mathbb{Z}_+$ e M suficientemente grande $\min\ \varphi_3 = \min\ \psi_3$. $\square$

3 Determinando soluções parciais-i eficientes para $(BPCE_c)$

Iniciamos essa seção apresentando de forma resumida os conceitos necessários para a apresentação de resultados para determinar a qualidade de uma solução factível para o problema $(BPCE_c)$ definido na Seção 2. Maiores detalhes podem ser obtidos em [1, 3, 5]. A solução de um problema multiobjetivo:

$$\begin{array}{lll} (MP) & min & f(x) \\ & s.a. & g_i(x) \leqq 0, \quad i = 1, \dots, m. \\ & & x \in S, \end{array}$$

em que S é um conjunto aberto do $\mathbb{R}^n$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_p) : S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ e $g = (g_1, g_2, \dots, g_m) : S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ são diferenciáveis, é dada por um conjunto não unitário de soluções, ditas eficientes no sentido de Pareto. É possível definir diversas relações de eficiência, em particular o conceito de *solução parcial-i eficiente*, Definição 3.1. Esse conceito é necessário para a definição de um *Problema parcial-i SKT-pseudoinvexo* (Definição 3.2).

Definição 3.1. ***(Solução parcial-**i **eficiente)****Um ponto factível, $\bar{x}$, é dito solução parcial-i eficiente para (MP) com $i \in \{1, \dots, n\}$, se* ***não*** *existe nenhum outro ponto factível, x, tal que $f(x) \leq_i f(\bar{x})$, isto é: $f(x) \leq_j f(\bar{x}) \Leftrightarrow f_i(x) \leq f_i(\bar{x}) \quad \forall i = 1, \dots, n,$ e $f_j(x) < f_j(\bar{x}),$ com $j \in \{1, \dots, n\}$.*

Definição 3.2. ***(Problema parcial-**i **SKT-pseudoinvexo)*** *Dado $i \in \{1, \dots, p\}$, o problema (MP) é dito parcial-i SKT-pseudoinvexo em $\bar{x}$ se existe uma função $\eta : S \times S \to \mathbb{R}^n$ tal que $\forall x$ factível*

$$f(x) - f(\bar{x}) \leq_i 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \nabla f(\bar{x})\eta(x, \bar{x}) \leq 0 & \\ \nabla g_j(\bar{x})\eta(x, \bar{x}) \leqq 0 & \quad \forall j \in I(\bar{x}), \end{array} \right.$$

onde $I(\bar{x}) = \{j : j = 1, \dots, m$ tal que $g_j(\bar{x}) = 0\}$.

DOI: 10.5540/03.2020.007.01.0347

Nos Teoremas 3.1 e 3.2 mostramos que as condições de otimalidade parcial propostos em [2] podem ser extendidas para o problema $(BPCE_c)$. Antes de enunciar e demonstrar esses resultados, precisamos do conceito de *Ponto Crítico de Kuhn-Tucker*, Definição 3.3.

Definição 3.3. ***(Ponto Crítico de Kuhn-Tucker)****Um ponto factível, $\bar{x}$ para (MP), é dito ponto crítico de Kuhn-Tucker(KTCP) se existe $\lambda \in \mathbb{R}^p$, $\mu \in \mathbb{R}^m$, tal que: $\lambda^T \nabla f(\bar{x}) + \mu^T \nabla g(\bar{x}) = 0$; $\mu^T g(\bar{x}) = 0$; $\mu \geqq 0$; $\lambda \geq 0$. Quando $\lambda > 0$, $\bar{x}$ é dito* ***ponto estrito de Kuhn-Tucker****(SKT).*

Conforme demonstrado em [2] temos que: *"Todo ponto estrito de Kuhn-Tucker é uma solução parcial-i eficiente para (MP) se, e somente se, (MP) é parcial-i SKT-pseudoinvexo"*. Assim, para a testar a qualidade de uma solução factivel x^* para o problema $(BPCE_c)$, mostramos inicialmente que se x^* é parcial-i eficiente para o problema (BP_{aux_c}) então também o é para o problema $(BPCE_c)$ definido em (4), Teorema 3.1.

$$
\begin{aligned}
(BP_{aux_c}) \quad min \quad & \varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_3(x)) \\
s.a. \qquad & x_j \in X_{aux} = \{x \in \mathbb{R}^n, x \geq 0 : \sum_{j=1}^{n} a_{ji} x_j - d_i \geq 0, i = 1, \ldots, m\}.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Teorema 3.1. *Seja $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$ (Suficientemente grande), e $x^* \in \mathbb{Z}^n$ um ponto factível de (BP_{aux_c}). Se x^* é uma solução parcial-1 eficiente de (BP_{aux_c}), então x^* é solução parcial-1 eficiente de $(BPCE_c)$.*

Demonstração. Seja $M > 0$ suficientemente grande e $x^* \in \mathbb{Z}^n$ uma solução parcial-1 eficiente para (BP_{aux_c}). Vamos supor que x^* não é solução parcial-1 eficiente para o problema $(BPCE_c)$. Ou seja, existe $\bar{x} \in X$ tal que $(\psi_1(\bar{x}), \psi_3(\bar{x})) \leqslant_1 (\psi_1(x^*), \psi_3(x^*))$. Como $x^* \in \mathbb{Z}^n$ e $x^* \in X_{aux}$, temos que $x^* \in X$, ou seja, x^* é factível para $(BPCE_c)$, assim temos pela Proposição 2.1 que $\varphi_3(x^*) = \psi_3(x^*)$ e $\varphi_3(\bar{x}) = \psi_3(\bar{x})$. Então, $(\varphi_1(\bar{x}), \varphi_3(\bar{x})) = (\psi_1(\bar{x}), \psi_3(\bar{x})) \leqslant_1 (\psi_1(x^*), \psi_3(x^*)) = (\varphi_1(x^*), \varphi_3(x^*))$. Ou seja:

$$
(\varphi_1(\bar{x}), \varphi_3(\bar{x})) \leqslant_1 (\varphi_1(x^*), \varphi_3(x^*)),
$$

o que é um absurdo, pois x^* é solução parcial-1 eficiente para (BP_{aux_c}) por hipótese. Portanto x^* é uma solução parcial-1 eficiente para $(BPCE_c)$. ☐

Para concluir, resta mostrar que o problema (BP_{aux_c}) é parcial-1 SKT-pseudoinvexo (Teorema 3.2) e que um ponto estrito de Kuhn-Tucker de (BP_{aux_c}) é solução parcial-1 eficiente de $(BPCE_c)$ (Teorema 3.3).

Teorema 3.2. *Seja $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$(Suficientemente grande), e $x^* \in \mathbb{Z}^n$ um ponto factível de (BP_{aux_c}), então (BP_{aux_c}) é parcial-1 SKT-pseudoinvexo em x^*.*

Demonstração. Seja x^* um ponto factível para (BP_{aux_c}), com $M \in \mathbb{R}_+$ suficientemente grande. Observe que $\nabla \varphi_1(x) = (1, \ldots, 1)$ e $\nabla \varphi_2(x) = (\phi'(x_1), \ldots, \phi'(x_n))$ em que

$$
\phi'(x_j) = \begin{cases} 0, & x_j < 0; \\ 2\pi(M+1) sen(\pi x_j) cos(\pi x_j), & 0 \leqslant x_j < \frac{1}{2}; \\ c + 2\pi(M) sen(\pi x_j) cos(\pi x_j), & x_j \geqslant \frac{1}{2}. \end{cases}
$$

Como $x \in \mathbb{Z}^n$ temos que $\phi^{'}(x_j) = \begin{cases} 0, & x_j = 0; \\ c, & x_j \geqslant \frac{1}{2}. \end{cases}$

Vamos reescrever as restrições de (BP_{aux_c}) como $X_{aux} = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leqq 0, i = 1, \ldots, m+n\}$ considerando $g = (g_1, \ldots, g_m, g_{m+1}, \ldots, g_{m+n}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m+n}$ definida como $g_i(x) = d_i - \sum a_{ij}x_j, i = 1, \ldots, m$ e $g_i(x) = -x_{i-m}, i = m+1, \ldots, m+n$. Para provar que (BP_{aux_c}) é parcial-1 SKT-Pseudoinvexo, vamos supor que exista $\bar{x} \in X_{aux}$ tal que $\varphi(\bar{x}) \leqslant_1 \varphi(x^*)$. Sob essa hipótese, e de acordo com a Definição 3.2, temos que encontrar $\eta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que

$$\begin{cases} \nabla\varphi(x^*)\eta(\bar{x}, x^*) \leqslant 0; \\ \nabla g_i(x^*)\eta(\bar{x}, x^*) \leqq 0, i \in I(x^*), \end{cases} \tag{5}$$

com $I(x^*) = \{i = 1, \ldots, m+n : g_i(x^*) = 0\}$. Observe que, $\nabla g_i(x^*) = (-a_{i1}, \ldots, -a_{in}), i = 1, \ldots, m$; e $\nabla g_{m+1}(x^*) = (-1, 0, \ldots, 0)$, $\nabla g_{m+2}(x^*) = (0, -1, \ldots, 0), \ldots, \nabla g_{m+n}(x^*) = (0, 0, \ldots, -1)$. Por hipótese $\varphi(\bar{x}) \leqslant_1 \varphi(x^*)$, então temos que $\varphi_1(\bar{x}) < \varphi_1(x^*)$. Definindo $\eta(\bar{x}, x^*) = \bar{x} - x^*$, devemos mostrar que:

i) $\nabla\varphi(x^*)\eta(\bar{x}, x^*) \leq 0$. De fato, para $i = 1$ temos que:

$$\nabla\varphi_1(x^*)\eta(\bar{x}, x^*) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 - x_1^* \\ \vdots \\ \bar{x}_n - x_n^* \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n \bar{x}_j - x_j^* < 0;$$

e para $i = 2$ temos que:

$$\nabla\varphi_3(x^*)\eta(\bar{x}, x^*) = \begin{pmatrix} \phi^{'}(x_1) & \phi^{'}(x_2) & \cdots & \phi^{'}(x_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 - x_1^* \\ \vdots \\ \bar{x}_n - x_n^* \end{pmatrix} \leq 0.$$

ii) Se $i = 1, \cdots, m$ e $i \in I(x^*)$, então:

$$\begin{aligned} \nabla g_i(x^*)\eta(\bar{x}, x^*) &= \sum_{j=1}^n -a_{ij}(\bar{x}_j - x_j^*) = \sum_{j=1}^n -a_{ij}\bar{x}_j + a_{ij}x_j^* = \\ &= \sum_{j=1}^n -a_{ij}\bar{x}_j + d_i \leq 0, \quad i = 1, \cdots, m \end{aligned}$$

Se $i = m+1, \cdots, m+n$ e $i \in I(x^*)$, então $g_i(x^*) = 0$, ou seja, $\eta(\bar{x}, x^*) = \bar{x}$. Logo,

$$\nabla g_i(x^*)\eta(\bar{x}, x^*) = -\bar{x}_i \leq 0, \quad i = m+1, \cdots, m+n.$$

Consequentemente, temos que a função η definida por $\eta(\bar{x}, x^*) = \bar{x} - x^*$ satisfaz (5) e portanto (BP_{aux_c}) é parcial-1 SKT-Pseudoinvexo.

□

Teorema 3.3. *Seja $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$(Suficientemente grande), e $x^* \in \mathbb{Z}^n$ um ponto factível de (BP_{aux_c}). Se x^* é um ponto estrito de Kuhn-Tucker de (BP_{aux_c}), então x^* é solução parcial-1 eficiente de $(BPCE_c)$.*

DOI: 10.5540/03.2020.007.01.0347

Demonstração. Seja $M \in \mathbb{R}_+$ suficientemente grande e $x^* \in \mathbb{Z}^n$ um ponto estrito de Kuhn-Tucker para (BP_{aux_c}). Como (BP_{aux_c}) é parcial-1 SKT-Pseudoinvexo pelo Teorema 3.2 temos que x^* é solução parcial-1 eficiente para (BP_{aux_c}). Finalmente pelo Teorema 3.1 temos que x^* é solução parcial-1 eficiente para $(BPCE_c)$. $\square$

No exemplo a seguir ilustramos como os resultados apresentados nessa seção podem ser úteis para avaliar a qualidade uma solução factível para o problema $(BPCE_c)$. Considere o seguinte problema de corte de estoque biobjetivo:

$$\begin{aligned} min \quad \psi(x) = \quad & (\psi_1(x), \psi_3(x)) = \left(\sum_{j=1}^{4} x_j, \sum_{j=1}^{4} \left\lceil \frac{x_j}{c} \right\rceil \right) \\ s.a. \quad & 6x_1 + 5x_2 \qquad \geq 102 \\ & 2x_3 + x_4 \geq 200 \\ & x_2 + 2x_3 + 3x_4 \geq 150 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{N}, \end{aligned} \tag{6}$$

Vamos escrever o problema auxiliar associado ao problema acima, com $M = 100$ e $c = 5$:

$$\begin{aligned} min \quad \varphi(x) = \quad & (\varphi 1(x), \varphi 3(x)) = \left(\sum_{j=1}^{4} x_j, \sum_{j=1}^{4} \phi(x_j) \right) \\ s.a. \quad & -6x_1 - 5x_2 \qquad + 102 \leq 0 \\ & -2x_3 - x_4 + 200 \leq 0 \\ & -x_2 - 2x_3 - 3x_4 + 150 \leq 0 \\ & -x_i \leq 0, i = 1 \dots 4. \end{aligned}$$

Vamos mostrar que o ponto factível $x^* = (17, 0, 100, 0)$ é um ponto estrito de Kuhn-Tucker do problema auxiliar. Para isso devemos mostrar que existem $\mu \geqq 0$ e $\lambda > 0$ tal que:

$$\begin{cases} \lambda^T \nabla f(x^*) + \mu^T \nabla g(x^*) = 0 \\ \mu^T g(x^*) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Considerando $f(x) = \varphi(x)$ e $g(x)$ as restrições de atendimento à demanda e não negatividade das variáveis em (7), obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 & \mu_5 & \mu_6 & \mu_7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 0 \\ \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 & \mu_5 & \mu_6 & \mu_7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -50 \\ -17 \\ 0 \\ -100 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \\ \lambda > 0, \mu \geqq 0 \end{cases} \tag{8}$$

Fixando $\mu_4 = 0$, $\mu_5 = 1$, $\mu_6 = 0$ e $\mu_7 = 4$, uma solução de (8) é $\lambda^* = \left(\frac{17}{2}, \frac{1}{10}\right), \mu^* = \left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}, 0, 0, 1, 0, 4\right)$. Portanto x^* é um ponto estrito de Kuhn-Tucker e, pelo Teorema 3.3 é uma solução parcial-1 eficiente para o problema de corte de estoque (6).

4 Conclusões

Nesse trabalho determinamos condições para que um ponto factível x^* para o problema (BP_{aux_c}) seja um ponto estrito de Kuhn-Tucker, e um ponto parcial-1 eficiente para o $(BPCE_c)$. Essa abordagem pode ser util para classificar soluções factíveis obtidas por métodos heurísticos e assim obter uma aproximação da Fronteira de Pareto. Outra forma de utilizar essa abordagem é resolver o sistema (7) admitindo que a solução factível x seja desconhecida. Nesse caso é necessário resolver um sistema de equações não lineares. Em [4] é proposta uma metodologia para obter soluções factíveis para sistemas de equações lineares e não lineares baseada em Programação por Metas. É importante observar que a metodologia proposta neste trabalho pode ser aplicada para resolver o PCE nos casos uni e bidimensional. A alteração necessária se dá no processo de obtenção dos padrões de corte.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001. Também contou com auxílio financeiro da FAPESP (Proc.2016/01860-1, 2013/07375-0). Agradecemos também ao docente da UNESP Valeriano Antunes de Oliveira pelas valiosas dicussões sobre invexidade.

Referências

[1] M. Arana, A. Rufián, R. Osuna and G. Ruiz. Pseudoinvexity, optimality conditions and efficiency in multiobjective problems; duality.*Nonlinear Anal*, 68: 24-34, 2008.

[2] M. Arana and L. Salles-Neto. Sufficient condition for partial efficiency in a bicriteria nonlinear cutting stock problem.*RAIRO-Operations Research*, 2016.

[3] J. Cervelati and M.A. Rojas-Medar. Funções Invexas Diferenciáveis e o Teorema de Karush-Kuhn-Tucker.*Tema Trends in Applied and Computational Mathematics*, v. 7, n. 1, p. 53-61, 2006.

[4] H. Florentino, F. Teles, M. Pedroso, J. Borges, and S. Rangel. Modelando e Resolvendo Sistemas Não Lineares com Técnicas de Programação por Metas. (*Em preparação*), 2019.

[5] H. Slimani and M. Radjef. *Multiobjective Programming under Generalized Invexity.* LAP LAMBERT Academic Publishing, 2010.

[6] A. Toscano, S. Rangel, and H.H. Yanasse. A heuristic approach to minimize the number of saw cycles in small-scale furniture factories. *Annals of Operation Research.* v. 258, p. 719-746, 2017. Doi 10.1007/s10479-015-1955-9.

DOI: 10.5540/03.2020.007.01.0347