

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Fluxo para Poços em Aquíferos: Solução via Método de Elementos Analíticos

João Paulo Martins dos Santos¹

Academia da Força Aérea - AFA

Sardar Muhammad Hussain²

Balochistan University of Information Technology, Engineering and Management Sciences

Alessandro Firmiano de Jesus³

Academia da Força Aérea - AFA

Edson Wendland⁴

Universidade de São Paulo - USP

Resumo.

Soluções analíticas para um conjunto de problemas envolvendo o fluxo subterrâneo podem ser calculadas por meio do método de elementos analíticos (MEA). A possibilidade de combinar a função potencial em uma única expressão matemática torna o MEA atrativo, pois permite considerar problemas envolvendo aquíferos confinados, não confinados ou a combinação de ambos em uma mesma equação. Neste artigo, o método de elementos analíticos foi utilizado para obter a solução do fluxo subterrâneo sob a ação conjunta de poços de bombeamento e injeção. O código computacional, baseado em uma biblioteca de computação científica, foi formulado para permitir a utilização de dados aleatórios para as vazões, posições e raios dos poços e pode ser utilizado para avaliação de diversos cenários envolvendo o fluxo para poços. Os resultados computacionais ilustram alguns cenários envolvendo o fluxo uniforme e os poços. Estes englobam a influência do fluxo uniforme na configuração das linhas potenciais e de corrente, a utilização da teoria das imagens para tratar a presença da fronteira física com carga constante e o cálculo da carga hidráulica.

Palavras-chave Fluxo Subterrâneo, Princípio da Superposição, Python Científico.

1 Introdução

O método de elementos analíticos (MEA) foi desenvolvido por Otto Strack para modelar a interação entre o fluxo subterrâneo e o canal *Tennessee-Tombigbee (1976)* [7]. Segundo Strack, [7], o modelo foi construído para reproduzir tanto o fluxo regional quanto o fluxo local devido ao funcionamento de um conjunto de poços. O método têm sido usado com sucesso em projetos conforme ilustrado em [7], [11] e pode ser visto como uma

¹jp2@usp.br

²smhussain01@gmail.com

³lezandro@gmail.com

⁴ew@sc.usp.br

alternativa aos métodos de diferenças finitas e elementos finitos na modelagem do fluxo subterrâneo [1].

As principais referências da literatura sobre o assunto são [8], [9] e [10]. Os principais conceitos e avanços na teoria do método de elementos analíticos são discutidos em [7] e [11]. No Brasil, o método é pouco difundido e seus principais estudos foram analisados em [7] e [2]. Discussões e aplicações adicionais podem ser encontradas em [6] e [4].

O método dos elementos analíticos (MEA) é um método computacional caracterizado pela discretização das componentes do sistema tais como: o fluxo uniforme, poços, rios, não homogeneidades, fraturas, etc. É um método livre de malha e não sofre dos problemas associados às discretizações dos domínios, tais como, o método de diferenças finitas ou o método de elementos finitos. O foco é a discretização das componentes do sistema de forma que a solução geral é obtida pela superposição das soluções.

Nessa metodologia de resolução, cada componente eleva a complexidade da solução. Problemas envolvendo o fluxo para poços em aquíferos homogêneos e isotrópicos podem ser resolvidos por meio da aplicação da superposição e da teoria das imagens. No entanto, problemas mais complexos envolvendo a presença de inhomogeneidades, fraturas, barreiras físicas no interior do domínio ou a combinação de várias características em um mesmo domínio requerem um método iterativo ou solução de um sistema linear para o cálculo da solução analítica. As referências [1], [6] e [4] fornecem detalhes adicionais.

Neste artigo, o objetivo é a aplicação do método dos elementos analíticos para obter a função potencial Φ e da função de corrente Ψ devido ao funcionamento de um conjunto finito de poços com localizações, vazões e raios aleatoriamente escolhidos. A função potencial Φ fornece a distribuição de cargas hidráulicas ϕ sobre o domínio computacional tanto em aquífero confinado quanto em aquífero livre ou combinação de ambos. Por sua vez, a função ϕ possibilita a obtenção do rebaixamento do nível potencial devido o funcionamento de um conjunto de poços de bombeamento, o incremento devido à presença de poços de injeção ou áreas de infiltração e, ainda, o correspondente campo de velocidades das águas subterrâneas. Complementando o cenário, a função Ψ fornece as linhas de corrente, ortogonais às isolinhas de potencial.

1.1 Modelo matemático

A equação governante para o fluxo bidimensional de águas subterrâneas, escrita em termos do potencial de descarga $\Phi = \Phi(x, y)$, para um aquífero isotrópico e homogêneo é dada por:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}(-Q_x) + \frac{\partial}{\partial y}(-Q_y) = 0, \quad (1)$$

sendo $(Q_x, Q_y) = (-\partial\Phi/\partial x, -\partial\Phi/\partial y) = (-\Phi_x, -\Phi_y)$ o vetor de descarga potencial. Em ambos os casos, aquíferos confinado e não confinado, são tratados pela mesma equação. A hipótese de Dupuit-Forchheimer e detalhes adicionais para obtenção da equação (1) são discutidos em [10].

A função de corrente, $\Psi = \Psi(x, y)$ possui o gradiente ortogonal ao gradiente de Φ e fornece a direção preferencial do fluxo de águas subterrâneas. Essas funções Φ e Ψ são

relacionadas pelas seguintes *Equações de Cauchy-Riemman*:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (2)$$

Assim, o potencial de descarga Φ , que é a solução da equação (1), relaciona-se com a carga hidráulica ϕ por meio das expressões:

$$\Phi = KH\phi + C_{conf}, \text{ se } \phi \geq H \quad \text{e} \quad \Phi = \frac{1}{2}K\phi^2 + C_{unconf}, \text{ se } \phi < H, \quad (3)$$

em que H é a espessura do aquífero, K a condutividade hidráulica, C_{conf} e C_{unconf} são constantes. A base do aquífero foi tomada como sendo o nível de referência. A utilização da equação (3) permite tratar tanto aquíferos confinados, não confinados ou a combinação de ambos. Uma discussão detalhada é apresentada em [10].

1.2 O princípio da superposição

Devido à linearidade da equação (1), o Princípio da Superposição pode ser aplicado. Portanto, se Φ_i é solução da equação (1) e Ψ_i é a respectiva função de corrente para $i = 1, \dots, N$, então:

$$\Phi = \sum_{i=1}^N \Phi_i \quad \text{e} \quad \Psi = \sum_{i=1}^N \Psi_i \quad (4)$$

são, respectivamente, solução de (1) e a função de corrente, obtida da equação (2).

O potencial constante Φ_0 , o potencial de fluxo uniforme Φ_{uni} e o potencial do poço Φ_w são elementos analíticos elementares. As funções Φ e respectivas funções Ψ são dados por:

$$\begin{aligned} \Phi_u &= -Q_{x_0} \cdot x - Q_{y_0} \cdot y & \Psi_u &= -Q_{x_0} \cdot y + Q_{y_0} \cdot x \\ \Phi_w &= \frac{Q}{4\pi} \ln((x - x_w)^2 + (y - y_w)^2) + C_w & \Psi_w &= \frac{Q}{2\pi} \arctan\left(\frac{y - y_w}{x - x_w}\right) \end{aligned} \quad (5)$$

em que Q_{x_0} , Q_{y_0} , C_w são constantes, Q e (x_w, y_w) são, respectivamente, a vazão e a localização do poço. Detalhes adicionais e algumas aplicações são apresentados em [10].

Para problemas envolvendo fronteiras de Dirichlet, o método das imagens, que é baseado na superposição e na simetria de localização [10], deve ser considerado. Por exemplo, se um poço de bombeamento está localizado em $(-d, 0)$ e $(0, y)$ é a fronteira de Dirichlet com carga hidráulica constante Φ_0 , então a função

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi} \ln((x + d)^2 + (y - y_w)^2) - \frac{Q}{4\pi} \ln((x - d)^2 + (y - y_w)^2) + \Phi_0 \quad (6)$$

é a solução da equação de Laplace satisfazendo a condição de contorno; Φ representa o potencial de um poço de bombeamento e de um poço de injeção, com localizações simétricas em relação a reta $x = 0$ e vazões $+Q$ e $-Q$, respectivamente.

2 A Implementação Computacional

Os problemas aqui estudados constituem-se, basicamente, de um conjunto finito de poços de bombeamento ou injeção com vazões distintas. As posições, (x_{w_i}, y_{w_i}) , as vazões, Q_i , e os raios dos poços, r_{w_i} , foram gerados aleatoriamente conforme as seguintes considerações:

- Número de poços: são valores inteiros k_1, k_2 tais que $k_1 + k_2 = N$ represente a quantidade de poços no domínio computacional.
- Coordenadas ($[m]$): as coordenadas (x_w, y_w) são aleatórias por meio da função `randint` de `NumPy` [12]. Um intervalo de variação $[a, b]$ foi estabelecido para cada uma das coordenadas.
- Vazões ($[m^3/d]$): gerar k_1 vazões aleatórias em um intervalo especificado $[c, d]$, $c, d > 0$ e k_2 vazões aleatórias em um intervalo $[-d, -c]$.
- Concatenação: obter uma lista de coordenadas dos poços e uma lista de vazões.
- Raios dos poços ($[m]$): gerar os raios dos poços em um intervalo $[r_1, r_2]$, com $0 < r_1, r_2 \ll 1$ e distribuição uniforme.
- Dados adicionais: $K[m/d]$, $Q_{x_0}, Q_{y_0}[m^2/d]$ e $\Phi_0[m]$ são arbitrários, mas não são aleatórios.

As considerações e discussões para o cálculo da carga hidráulica ϕ pode ser encontrado em [10]. O código computacional foi desenvolvido utilizando linguagem Python por meio do sistema SciPy, [5], cujos componentes englobam as bibliotecas NumPy, [12], e Matplotlib [3].

3 Resultados e Discussão

As soluções de elementos analíticos para um conjunto de N poços em campo uniforme, calculadas por meio das expressões (4), (5) e (6), são dadas por:

$$\Phi = \Phi_{uni} + \sum_{i=1}^N \Phi_i + \sum_{i=1}^N \Phi_{imag_i} + C \quad \Psi = \Psi_{uni} + \sum_{i=1}^N \Psi_i + \sum_{i=1}^N \Psi_{imag_i} \quad (7)$$

em que $\Phi_{imag_i} = 0$ se não há fronteira de Dirichlet.

3.1 Problema 01

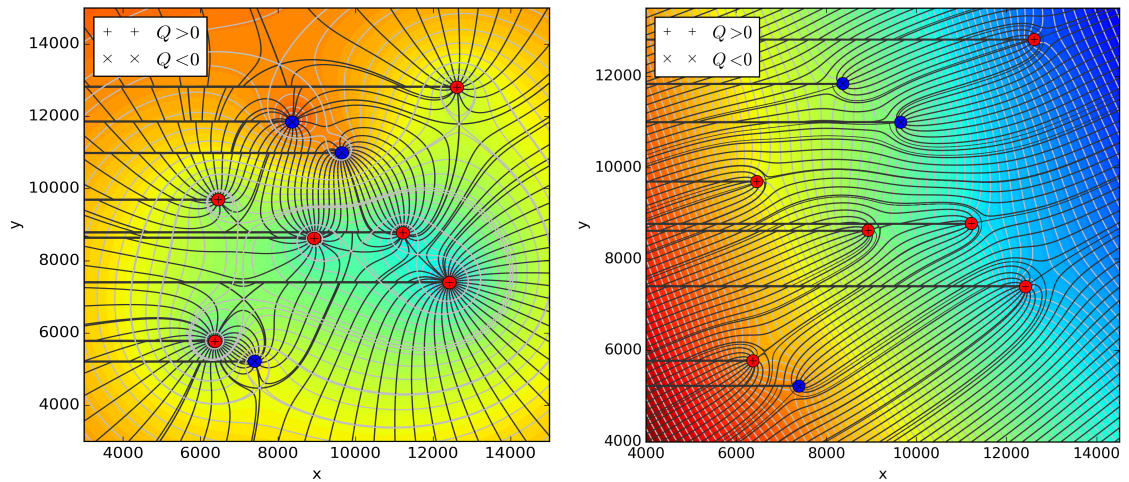
Considere o fluxo uniforme e um conjunto de $N = 9$ poços em operação em um domínio infinito. Os principais parâmetros são: $k_1 = 6, k_2 = 3, [a, b] = [5000; 13000], [c, d] = [100; 300], [r_1, r_2] = [0, 1; 0, 2]$ e $\Phi_0 = \Phi(0, 0) = 100m$. Nesse caso, dois cenários de potencial de fluxo uniforme Φ_{uni} foram considerados: o primeiro adota $Q_{x_0} = 0, 0$ e

$Q_{y_0} = 0,0$ (Figura 1(a)), enquanto que o segundo adota $Q_{x_0} = 0,1$ e $Q_{y_0} = 0,005$ (Figura 1(b)).

As funções Φ e Ψ são dadas pelas expressões em (7) com $\Phi_{imag_i} = 0$. Os resultados da sobreposição das isolinhas das funções Φ e Ψ são apresentados nas Figuras 1(a) e 1(b).

A Figura 1(a), mostra o efeito da operação dos poços em um domínio com potencial uniforme nulo $\Phi_{uni} = 0$. Neste caso, toda a água injetada é captura pelo bombeamento conforme pode ser observado nas linhas de corrente saindo dos poços de injeção para os poços de bombeamento. A análise das linhas de corrente mostra que um poço de bombeamento captura água somente do aquífero, enquanto que a vazão dos demais poços é uma composição entre a água proveniente dos poços de injeção e do aquífero.

Por sua vez, a Figura 1(b) apresenta o efeito do potencial de fluxo uniforme não nulo sobre a operação dos poços. A presença do potencial não nulo afeta drasticamente o cenário das linhas potenciais e de corrente. Diferentemente do cenário anterior, o fluxo uniforme abastece a maioria dos poços. Devido à localização dos poços de injeção, a água proveniente da injeção é parcialmente capturada e o restante é disponibilizada ao aquífero.



(a) Campo uniforme $Q_{x_0} = Q_{y_0} = 0$.

(b) Campo uniforme $Q_{x_0} = 0,1$ e $Q_{y_0} = 0,05$.

Figura 1: Isolinhas das soluções Φ e Ψ para um conjunto de N poços em domínio com potencial uniforme.

3.2 Problema 02

Considere o fluxo uniforme com $Q_{x_0} = 0,1$ e $Q_{y_0} = 0,0$ e um conjunto de $N = 9$ poços em operação em um domínio com um rio de carga constante Φ_0 em $x_0 = 5000$. Os dados são: $k_1 = 6$, $k_2 = 3$, $[a, b] = [2200; 5000]$, $[c, d] = [100; 300]$, $[r_1, r_2] = [0, 1; 0, 2]$ com distribuição uniforme e $\Phi_0 = \Phi(0, y) = 100$ e $K = 0,0001$, $H = 20$.

Analogamente ao caso anterior, as funções Φ e Ψ são dadas pelas expressões (7) com $\Phi_{imag_i} \neq 0$. A Figura 2(a) apresenta os resultados da sobreposição das isolinhas das funções Φ e Ψ , enquanto que 2(b) apresenta a sobreposição das isolinhas de Ψ com as

isolinhas da função ϕ , obtida pela utilização da equação (3). Note que há similaridade entre as figuras pois o fluxo é confinado.

A análise do cenário da Figura 2(a), mostra que parte da água injetada é captura pelo bombeamento, enquanto o restante é transmitida ao rio, representada pela fronteira de Dirichlet $x = 5000$. Por sua vez, o rio abastece parcialmente o poço de bombeamento mais à direita e os demais poços de bombeamento são abastecidos pelo aquífero e pelos poços de injeção.

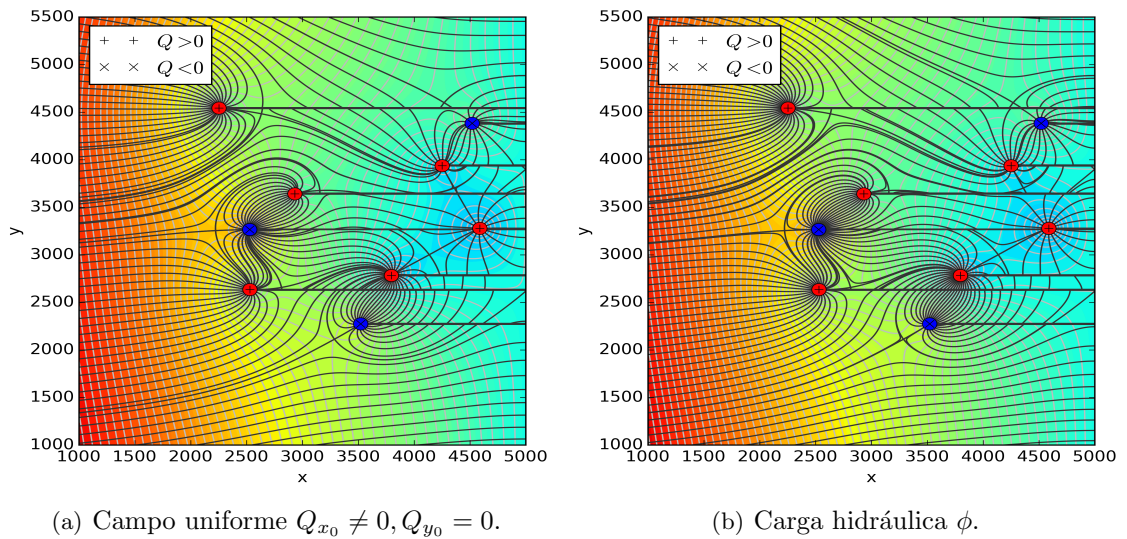


Figura 2: Isolinhas das soluções Φ , ϕ e Ψ para um conjunto de N poços em domínio com potencial uniforme e fronteira de Dirichlet.

4 Conclusões

O método de elementos analíticos possibilitou o cálculo das soluções analíticas de um aquífero sob o efeito da operação de um conjunto de poços de bombeamento e injeção. A inclusão da aleatoriedade das posições, das vazões e dos raios dos poços permitiu avaliar cenários mais complexos e permite explorar diversas configurações de cenários para poços de bombeamento e injeção. Além disso, fornece a capacidade de explorar as influências do fluxo uniforme com componentes apenas na direção x , apenas na direção y ou em ambas as direções. A possibilidade de utilizar a teoria das imagens permite resolver problemas com fronteiras de Dirichlet e adiciona uma outra possibilidade de cenário. O código permite a exploração de uma vasta gama de cenários, pode ser estendido diretamente para explorar a presença de barreiras físicas, a combinação entre barreira física e fronteira de carga constante e não está restrito à quantidade de poços no domínio computacional.

Referências

- [1] M. F. Alencar, E. Wendland. Método de elementos analíticos: uma alternativa para a modelagem de escoamento subterrâneo, *Águas Subterrâneas*, 27:110-124, 2013.
- [2] V. F. Boico. Modelo analítico para a avaliação do escoamento de água no Aquífero Guarani em Bauru/SP, Dissertação de Mestrado, EESC/USP, 2016.
- [3] J. D. Hunter. Matplotlib: A 2d graphics environment, *Computing In Science & Engineering*, *IEEE COMPUTER SOC*, 9:90-95, 2007.
- [4] S. M. Hussain. Simulation of groundwater flow by the analytic element method, Tese de Doutorado, ICMC/USP, 2017.
- [5] E. Jones, E. Oliphant, P. Peterson, et al. SciPy: Open Source Scientific Tools for Python, 2001. Disponível em <http://www.scipy.org/>. Acesso em 28.fev.2019.
- [6] I. S. P. Marin. Aperfeiçoamento do método de elementos analíticos para simulação de escoamento em rochas porosas fraturadas, Tese de Doutorado, EESC/USP, 2011.
- [7] O. D. L. Strack. Theory and Applications fo the Analytic Element Method, *Reviews of Geophysics*, 41:1-19, 2003. DOI:10.1029/2002RG000111.
- [8] O. D. L. Strack. *Groundwater Mechanics*. Prentice Hall, 1989.
- [9] O. D. L. Strack, H. Haitjema. *Analytic Element Modeling of Groundwater Flow*, Academic Press, 1995.
- [10] O. D. L. Strack. *Analytical Groundwater Mechanics*. Cambridge University Press, 2017.
- [11] O. D. L. Strack, M. F. Alencar Neto, E. Wendland. Teoria e Aplicações do Método de Elementos Analíticos, *RBRH - Revista Brasileira de Recursos Hídricos*, 14:5-15, 2009. DOI: 10.21168/rbrh.v14n3.p5-15.
- [12] S. van der Walt, S. Colbert, G. Varoquaux. The NumPy Array: A Structure for Efficient Numerical Computation, *Computing in Science Engineering*, 13:22-30, 2011.