Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 7, n. 1, 2020.

Trabalho apresentado no XXXIX CNMAC, Uberlândia - MG, 2019.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Função k-Mittag-Leffler como núcleo de um operador integrodiferencial fracionário e a desigualdade de Gronwall

Daniela dos Santos de Oliveira [1]
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) - campus Guarapuava
E. Capelas de Oliveira [2]
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Unicamp

Resumo. Apresentamos um operador integrodiferencial fracionário, contendo em seu núcleo uma função k-Mittag-Leffler generalizada e, admitindo como casos particulares as funções de Mittag-Leffler associadas ao cálculo fracionário. Propomos, também, uma generalização para a desigualdade de Gronwall.

Palavras-chave. Cálculo fracionário. Integração fracionária. Funções k-Mittag-Leffler. Desigualdade de Gronwall.

1 Introdução

As clássicas derivadas fracionárias são expressas em termos de uma respectiva integral fracionária. Denominamos por clássicas as derivadas fracionárias de Riemann-Liouville, Caputo e Hadamard [2]. As integrais fracionárias também têm sido amplamente utilizadas, por exemplo, em generalizações envolvendo desigualdades, em particular, as desigualdades de Minkowski [17] e de Grüss [18].

Generalizações para as integrais fracionárias, contendo em seus núcleos, funções hipergeométricas, G de Meijer, H de Fox e de Mittag-Leffler, têm surgido na literatura recente. Em 2017, foi introduzida uma generalização para as integrais fracionárias a qual, com a escolha aproprida de parâmetros, recupera as integrais de Riemann-Liouville, Hadamarad, Katugampola, bem como as integrais k-fracionárias, [10, 13]. Propomos uma generalização para este operador de integração cujo núcleo é mais geral do que o proposto em [13] e envolve a uma função k-Mittag-Leffler generalizada.

Por outro lado, a desigualdade de Gronwall [7] é muito utilizada na teoria de equações diferenciais e é possível utilizá-la de modo a relacionar soluções de duas equações diferenciais, em particular, equações diferenciais fracionárias [1]. Também é possível aplicar tal desigualdade para provar a existência e unicidade de um problema de Cauchy, envolvendo estas derivadas, [16]. Obtemos uma generalização para esta desigualdade envolvendo a inserção de um novo parâmetro.

[1]oliveiradaniela@utfpr.edu.br
[2]capelas@ime.unicamp.br

2 Funções k-Mittag-Leffler

Na resolução de uma equação diferencial fracionária com coeficientes constantes e de uma equação integral emergem, naturalmente, as chamadas funções de Mittag-Leffler, uma generalização da função exponencial. São vários os textos que abordam tais funções [3,11,14]. Apresentamos generalizações destas funções, conhecidas como funções k-Mittag-Leffler. Inicialmente, Díaz e Pariguan [4] definiram a função k-gama, o símbolo k-Pochhammer e a função k-beta. Começamos explicitando a função k-gama definida por

$$\Gamma_k(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \mathrm{e}^{-\frac{t^k}{k}} dt, \quad \text{com} \quad x, k > 0, \tag{1}$$

de modo que, valem as seguintes relações:

$$\Gamma_k(x) = k^{\frac{x}{k}-1}\, \Gamma\left(\frac{x}{k}\right) \qquad \text{e} \qquad \Gamma_k(k) = 1. \tag{2}$$

No caso em que $k \to 1$, temos que $\Gamma_k(x) = \Gamma(x)$, onde $\Gamma(x)$ é a clássica função gama. O símbolo k-Pochhammer é definido por

$$(x)_{n,k} = \begin{cases} 1, & \text{para} \quad n = 0 \\ x(x+k)\cdots(x+(n-1)k), & \text{para} \quad n \in \mathbb{N},\, x \in \mathbb{R},\, k > 0, \end{cases} \tag{3}$$

ou ainda, em termos de um quociente de funções k-gama,

$$(x)_{n,k} = \frac{\Gamma_k(x+nk)}{\Gamma_k(x)}. \tag{4}$$

Finalmente, a função k-beta é definida por

$$B_k(x,y) = \frac{1}{k}\int_0^1 t^{\frac{x}{k}-1}(1-t)^{\frac{y}{k}-1} dt, \quad x > 0, \quad y > 0, \quad k > 0. \tag{5}$$

Note que, quando $k \to 1$ temos $B_k(x,y) = B(x,y)$, onde $B(x,y)$ é a clássica função beta. A função k-beta pode ser escrita, em termos da função k-gama e da função beta, respectivamente, da seguinte forma

$$B_k(x,y) = \frac{\Gamma_k(x)\,\Gamma_k(y)}{\Gamma_k(x+y)} \qquad \text{e} \qquad B_k(x,y) = \frac{1}{k} B\left(\frac{x}{k}, \frac{y}{k}\right).$$

A fim de generalizar as funções de Mittag-Leffler, Dorrego e Cerutti [6], definiram a chamada função k-Mittag-Leffler com três parâmetros, da seguinte forma

$$E^{\eta}_{k,\beta,\gamma}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\eta)_{n,k}}{\Gamma_k(\beta n + \gamma)} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{R}, \quad \beta > 0, \quad \gamma > 0, \tag{6}$$

onde $n \in \mathbb{N}$, $(\eta)_{n,k}$ é o símbolo k-Pochhammer definido na Eq.(3) e $\Gamma_k(x)$ é a função k-gama, dada pela Eq.(1). No caso em que $k = 1$ recuperamos a função de Mittag-Leffler com três parâmetros [12]. Por não ser possível, obter uma função k-Mittag-Leffler com dois parâmetros a partir da Eq.(6), Gupta e Parihar [8] definiram a seguinte função, denominada função k-Mittag-Leffler com dois parâmetros, através da série

$$E_{k,\xi,\sigma}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma_k(\xi n + \sigma)}, \quad z \in \mathbb{R}, \quad \xi > 0, \quad \sigma > 0, \tag{7}$$

onde $n \in \mathbb{N}$. Aqui, também, a função de Mittag-Leffler com dois parâmetros como introduzida por Wiman [19] é recuperada para $k = 1$. Nisar et al. [9] propuseram a mais recente generalização para a função k-Mittag-Leffler através da seguinte série

$$E^{\mu,q}_{k,\beta,\gamma,\xi}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu)_{qn,k}}{\Gamma_k(\beta n + \gamma)} \frac{z^n}{(\xi)_n}, \quad \beta, \gamma, \mu, \xi \in \mathbb{R}, \quad \beta > 0, \quad \gamma > 0, \tag{8}$$

onde $\mu \neq -1, -2, \ldots$ e qn é um inteiro positivo. Note que, se $\mu = 1$ e $q = 1$, temos a função k-Mittag-Leffler com três parâmetros, Eq.(6).

3 Integral fracionária

Começamos com a definição de um operador, recentemente introduzido [13], de modo que este recupera com convenientes limites, outros operadores de intergração fracionários bem estabelecidos na literatura [10].

Definição 3.1. *Sejam $\alpha \in \mathbb{R}^+$ e $n \in \mathbb{N}$ tal que $n - 1 < \alpha < n$ e $\varphi \in L(a, b)$. Então, a (k, ρ)-integral fracionária de Riemann-Liouville de φ é definida por*

$$({}^{\rho}_{k}\mathcal{J}^{\alpha}_{a^+}\varphi)(x) = \frac{1}{k\,\Gamma_k(\alpha)} \int_a^x \left(\frac{x^\rho - t^\rho}{\rho} \right)^{\frac{\alpha}{k}-1} t^{\rho-1}\varphi(t)dt, \quad x > a, \tag{9}$$

onde $k > 0$ e $\rho > 0$. Este operador de integração é chamado operador à esquerda. De maneira análoga define-se o operador à direita [10].

Ressaltamos que, com a escolha dos seguintes parâmetros na Eq.(9), recuperamos outros operadores de integração fracionários [10], a saber:

- se $k = 1$, obtemos o operador de integração proposto por Katugampola;
- se $k = 1$ e $\rho = 1$, obtemos o clássico operador de integração de Riemann-Liouville;
- se $k = 1$ e $\rho = 0$, obtemos o bem conhecido operador de integração fracionário proposto por Hadamard.

4 Função k-Mittag-Leffler generalizada como núcleo de um operador integrodiferencial fracionário

Existem diferentes definições para os operadores de integração fracionários cujo núcleo contêm funções especiais como, por exemplo, as funções hipergeométrica, G de Meijer, H

de Fox e de Mittag-Leffler, [5, 12, 15]. Propomos uma generalização para o operador de integração (k,ρ)-fracionário, contendo em seu núcleo a função k-Mittag-Leffler generalizada, Eq.(8).

Definição 4.1. *Sejam $\mu,\xi,\omega \in \mathbb{R}$ tais que $\beta > 0$, $\gamma > 0$, $\rho > 0$, $k > 0$ e $\varphi \in L(a,b)$. Então,*

$$({}_{k}^{\rho}\mathscr{E}^{\mu,q}_{a^+,\beta,\gamma,\xi,\omega}\varphi)(x) = \frac{1}{k}\int_a^x \left(\frac{x^\rho - t^\rho}{\rho}\right)^{\frac{\gamma}{k}-1} t^{\rho-1} E^{\mu,q}_{k,\beta,\gamma,\xi}\left[\omega\left(\frac{x^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\frac{\alpha}{k}}\right]\varphi(t)dt, \qquad (10)$$

com $x > a$, onde $\mu \neq -1,-2,\ldots$, qn é um inteiro positivo e $E^{\mu,q}_{k,\beta,\gamma,\xi}(\cdot)$ é a função k-Mittag-Leffler generalizada, Eq.(8). Note que, para $\mu = 0$ temos $({}_{k}^{\rho}\mathscr{E}^{q}_{a^+,\beta,\gamma,\xi,\omega}\varphi)(x) = ({}_{k}^{\rho}\mathcal{J}^{\gamma}_{a^+}\varphi)(x)$. Tal operador satisfaz as seguintes propriedades, enunciadas no teorema a seguir.

Teorema 4.1. *Sejam $\mu,\xi,\omega,\sigma,\delta,\beta,\gamma,\rho,k \in \mathbb{R}$ tais que $\beta > 0$, $\gamma > 0$, $\rho > 0$, $k > 0$ e $\varphi \in L(a,b)$. Então,*

(i) $({}_{k}^{\rho}\mathscr{E}^{\mu,q}_{a^+,\beta,\gamma,\xi,\omega}\;{}_{k}^{\rho}\mathcal{J}^{\alpha}_{a^+}\varphi)(x) = ({}_{k}^{\rho}\mathscr{E}^{\mu,q}_{a^+,\beta,\gamma+\alpha,\xi,\omega}\varphi)(x) = ({}_{k}^{\rho}\mathcal{J}^{\alpha}_{a^+}\;{}_{k}^{\rho}\mathscr{E}^{\mu,q}_{a^+,\beta,\gamma,\xi,\omega}\varphi)(x)$;

(ii) $({}_{k}^{\rho}\mathscr{E}^{\mu,q}_{a^+,\beta,\gamma,\xi,\omega}\;{}_{k}^{\rho}\mathscr{E}^{\sigma,q}_{a^+,\beta,\delta,\xi,\omega}\varphi)(x) = ({}_{k}^{\rho}\mathscr{E}^{\mu+\sigma,q}_{a^+,\beta,\gamma+\delta,\xi,\omega}\varphi)(x) = ({}_{k}^{\rho}\mathscr{E}^{\sigma,q}_{a^+,\beta,\delta,\xi,\omega}\;{}_{k}^{\rho}\mathscr{E}^{\mu,q}_{a^+,\beta,\gamma,\xi,\omega}\varphi)(x)$.

Demonstração. Vamos demonstrar apenas o item (i), visto que, para o item (ii), o procedimento é similar. A partir da Definição 3.1 e da Definição 4.1, temos que

$$\begin{aligned}({}_{k}^{\rho}\mathscr{E}^{\mu,q}_{a^+,\beta,\gamma,\xi,\omega}\;{}_{k}^{\rho}\mathcal{J}^{\alpha}_{a^+}\varphi)(x) &= \frac{1}{k}\int_a^x \left(\frac{x^\rho - t^\rho}{\rho}\right)^{\frac{\gamma}{k}-1} t^{\rho-1} E^{\mu,q}_{k,\beta,\gamma,\xi}\left[\omega\left(\frac{x^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\frac{\beta}{k}}\right] \\ &\times \left\{\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t \left(\frac{t^\rho - u^\rho}{\rho}\right)^{\frac{\alpha}{k}-1} u^{\rho-1}\varphi(u)du\right\} dt.\end{aligned}$$

Introduzindo a mudança de variável $u = \dfrac{t^\rho - u^\rho}{x^\rho - u^\rho}$, obtemos

$$\begin{aligned}({}_{k}^{\rho}\mathscr{E}^{\mu,q}_{a^+,\beta,\gamma,\xi,\omega}\;{}_{k}^{\rho}\mathcal{J}^{\alpha}_{a^+}\varphi)(x) &= \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^x u^{\rho-1}\varphi(u)du \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mu)_{qn,k}\,\omega^n}{\Gamma_k(\beta n+\gamma)(\xi)_n}\rho^{2-\frac{\gamma-\beta n-\alpha}{k}-1} \\ &\times (x^\rho - u^\rho)^{\frac{\gamma+\beta n+\alpha}{k}-1}\left\{\frac{1}{k}\int_0^1 (1-u)^{\frac{\gamma+\beta n}{k}-1} u^{\frac{\alpha}{k}-1}du\right\},\end{aligned}$$

onde a expressão entre chaves é a função beta. Utilizando a relação entre as funções gama e beta, podemos escrever, após simplificações,

$$\begin{aligned}({}_{k}^{\rho}\mathscr{E}^{\mu,q}_{a^+,\beta,\gamma,\xi,\omega}\;{}_{k}^{\rho}\mathcal{J}^{\alpha}_{a^+}\varphi)(x) &= \frac{1}{k}\int_a^x \left(\frac{x^\rho - u^\rho}{\rho}\right)^{\frac{\gamma+\alpha}{k}-1} E^{\mu,q}_{k,\beta,\gamma+\alpha,\xi}\left[\omega\left(\frac{x^\rho - u^\rho}{\rho}\right)^{\frac{\beta}{k}}\right] u^{\rho-1}\varphi(u)du \\ &= ({}_{k}^{\rho}\mathscr{E}^{\mu,q}_{a^+,\beta,\gamma+\alpha,\xi,\omega}\varphi)(x).\end{aligned}$$

De maneira análoga, mostra-se que $({}_{k}^{\rho}\mathcal{J}^{\alpha}_{a^+}\;{}_{k}^{\rho}\mathscr{E}^{\mu,q}_{a^+,\beta,\gamma,\xi,\omega}\varphi)(x) = ({}_{k}^{\rho}\mathscr{E}^{\mu,q}_{a^+,\beta,\gamma+\alpha,\xi,\omega}\varphi)(x)$. $\square$

5 Desigualdade de Gronwall generalizada

Em 1919, Gronwall [7] demonstrou uma importante desigualdade, até hoje, muito utilizada na teoria de equações diferenciais. Generalizações envolvendo esta desigualdade têm sido amplamente estudadas [1,16,20]. Tendo em vista estas generalizações estudadas à luz do cálculo fracionário, generalizamos tal desigualdade envolvendo mais um parâmetro, sendo este, $k > 0$, a partir do teorema a seguir.

Teorema 5.1. *Sejam u e v duas funções integráveis e g uma função contínua, com domínio $[a, b]$. Admita que*

1. *u e v são não negativas;*
2. *g é não negativa e não decrescente.*

Se

$$u(t) \leq v(t) + g(t) \int_a^t \left(\frac{t^\rho - \tau^\rho}{\rho} \right)^{\frac{\alpha}{k}-1} \tau^{\rho-1} u(\tau) d\tau, \quad \forall t \in [a, b], \quad k > 0,$$

então

$$u(t) \leq v(t) + k \int_a^t \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[g(t)\Gamma_k(\alpha)]^m}{\Gamma_k(m\alpha)} \left(\frac{t^\rho - \tau^\rho}{\rho} \right)^{m\frac{\alpha}{k}-1} v(\tau) d\tau \quad \forall t \in [a, b], \quad k > 0.$$

Ainda mais, se v é não decrescente, então

$$u(t) \leq v(t) \left\{ \left(\frac{1}{k} - 1 \right) + E_{k,\alpha,k} \left[g(t)\Gamma_k(\alpha) \left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho} \right)^{\frac{\alpha}{k}} \right] \right\}, \quad k > 0.$$

Note que, quando $k = 1$, recuperamos a desigualdade dada em [1].

Demonstração. A demonstração é similar às demonstrações feitas em [1, 16], definindo-se, porém, um funcional que depende de mais um parâmetro, $k > 0$.

□

6 Conclusões

Discutimos, neste trabalho, uma generalização para as integrais fracionárias. Tal generalização contém no núcleo do operador de integração, uma função k-Mittag-Leffler generalizada. Apresentamos um teorema com duas propriedades deste operador de integração, valendo a propriedade de semigrupo. Apresentamos, também, uma generalização para a desigualdade de Gronwall. Uma possível aplicação para estes resultados é, sob algumas hipóteses, discutir a existência do seguinte problema de Cauchy

$$({}_k^\rho\mathscr{D}_{a^+}^{\alpha-\delta,\nu}\varphi)(x) = ({}_k^\rho\mathscr{E}_{a^+,\beta,\gamma,\xi,\omega}^{\mu,q}\varphi)(x), \tag{11}$$

$$({}_k^\rho\mathcal{J}_{a^+}^{(1-\nu)(kn-\alpha)-k(n-j)-\delta}\varphi)(a^+) = \bar{b}_j, \quad \bar{b}_j \in \mathbb{R},\ (j = 1, 2, \ldots, n),, \tag{12}$$

utilizando a desigualdade de Gronwall, onde ${}_k^\rho\mathscr{D}_{a^+}^{\alpha-\delta,\nu}$ é um operador de diferenciação proposto em [10] e $({}_k^\rho\mathscr{E}_{a^+,\beta,\gamma,\xi,\omega}^{\mu,q}\varphi)(x)$ dado pela Eq.(10).

Referências

[1] R. Almeida. A Gronwall inequality for a general Caputo fractional operator, *Math. Ineq. Appl.*, 20:1089–1105, 2017. DOI: 10.7153/mia-2017-20-70.

[2] E. Capelas de Oliveira and J. A. Tenreiro Machado. A review of definitions for fractional derivatives and integral, *Math. Prob. Eng.*, 2014:1–6, 2014. DOI: 10.1155/2014/238459.

[3] E. Contharteze Grigoletto, E. Capelas de Oliveira and R. F. Camargo. Linear fractional differential equations and eigenfunctions of fractional differential operator, *Comp. Appl. Math.*, 1:1–15, 2016. DOI: 10.1007/s40314-016-0381-1.

[4] R. Díaz and E. Pariguan. On hypergeometric functions and Pochhammer k-symbol, *Divulg. Mat.*, 15:179–192, 2007.

[5] G. A. Dorrego. Generalized Riemann-Liouville fractional operators associated with generalization of the Prabhakar integral operator, *Progr. Fract. Differ. Appl.*, 2:131–140, 2016. DOI: 10.18576/pfda/020206.

[6] G. A. Dorrego and R. A. Cerutti. The k-Mittag-Leffler function, *Int. J. Comtemp. Math. Sciences*, 7:705–716, 2012.

[7] T. H. Gronwall. Note on the derivatives with respect to a parameter of the solutions of a system of differential equations, *Ann. Math.*, 20:292–296, 1919.

[8] A. Gupta and C. L. Parihar. k-new generalized Mittag-Leffler function, *J. Frac. Calc. Appl.*, 5:165–176, 2014.

[9] K. S. Nissar, S. D. Purohit, M. S. Abouzaid, M. Al Qurashi and D. Baleanu. Generalized k-Mittag-Leffler function and its composition with pathway integral operators, *J. Nonlinear Science Appl.*, 9:3519–3526, 2016.

[10] D. S. Oliveira. Fractional derivatives: generalizations, Tese de doutorado, Unicamp, Campinas, 2018.

[11] D. S. Oliveira, S. Deif and E. Capelas de Oliveira. On a sum with a three-parameter Mittag-Leffler function, *Int. Transf. Spec. Functions*, 27:639–652, 2016. DOI: 10.1080/10652469.2016.1182523

[12] T. R. Prabhakar. A singular integral equation with a generalized Mittag-Leffler function in the kernel, *Yokohama Math. J.*, 19:7–15, 1971.

[13] M. Z. Sarikaya, Z. Dahmani, M. E. Kiris and F. Ahmad. (k, s)-Riemann-Liouville fractional integral and applications, *Hacet. J. Math. Stat.*, 45:77–89, 2016.

[14] A. L. Soubhia, R. F. Camargo, E. Capelas de Oliveira and J. Vaz Jr. Theorem for series in three-parameter Mittag-Leffler function, *Frac. Calc. Appl. Anal*, 13:9–20, 2010.

[15] H.M. Srivastava and $\check{Z}$. Tomovski. Fractional calculus with an integral operator containing a generalized Mittag-Leffler function in the kernel, *Appl. Math. Comp.*, 211:198–210, 2009. DOI: 10.1016/j.amc.2009.01.055.

[16] J. Vanterler da C. Sousa and E. Capelas de Oliveira. A Gronwall inequality and the Cauchy-type problem by means of Ψ-Hilfer operator, *Differ. Equ. Appl.*, 11:87–106, 2019. DOI: 10.7153/dea-2019-11-02.

[17] J. Vanterler da C. Sousa and E. Capelas de Oliveira. The Minkowski's inequality by means of a generalized fractional integral, *AIMS Math.*, 3:131–147, 2018. DOI: 10.3934/Math.2018.1.131.

[18] J. Vanterler da C. Sousa, D. S. Oliveira and E. Capelas de Oliveira. Grüss-type inequalities by means of generalized fractional integrals, submetido à publicação *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society*, 2018.

[19] A. Wiman. Über den fundamental Satz in der theorie der Funktionen $E_\alpha(x)$, *Acta. Math.*, 29:191–201, 1905.

[20] Q. Wu. A new type Gronwall-Bellman inequality and its application to fractional stochastic differential equations, *Cog. Math.*, 4:1–13, 2017. DOI: 10.1080/23311835.2017.1279781.

