Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 7, n. 1, 2020.

Trabalho apresentado no XXXIX CNMAC, Uberlândia - MG, 2019.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Simetrias de Lie de Equações do Tipo Camassa-Holm Com Perda de Energia

Igor Leite Freire [1]
Centro de Matemática, Computação e Cognição, Universidade Federal do ABC

Neste trabalho consideramos equações do tipo Camassa-Holm incorporando efeitos devidos à rotação da Terra e termos dissipativos. Simetrias de Lie são consideradas e um resultado de não existência de leis de conservação é apresentado.

Palavras-chave. Simetrias de Lie, leis de conservação, equação de Camassa-Holm, dissipação.

1 Introdução

A equação de Camassa-Holm (CH, daqui em diante)

$$u_t - u_{txx} + 3uu_x = uu_{xxx} + 2u_x u_{xx} \tag{1}$$

foi obtida em 1993 por Camassa e Holm no estudo de propagação de ondas em águas rasas, veja [2]. Tal equação tem sido objeto de grande interesse por parte da comunidade matemática, tanto em linhas mais teóricas quanto aplicadas, pelo fato de a equação (1) possuir uma rica estrutura intrínseca. Por exemplo:

1. a equação possui estrutura bi-Hamiltoniana [2];
2. como consequência da estrutura bi-Hamiltoniana, a equação possui um operador de recursão, o que implica na existência de uma hierarquia infinita de simetrias de alta ordem [13]. Entretanto, em razão desta equação não ser evolutiva, tais simetrias de alta ordem são *não-locais*, o que trás complicações para seu estudo e entendimento;
3. a equação possui uma infinidade de leis de conservação [2];
4. a equação possui solitons fracos, chamados peakons, [2];
5. a equação é geometricamente integrável, veja [4] e referências correlatas.

Estes são alguns aspectos, talvez os primeiros, que explicam as extraordinárias propriedades exibidas pela equação. Nas referências [4, 6] pode-se encontrar uma série de outras

[1] igor.leite.freire@gmail.com

propriedades interessantes desta equação, bem como uma extensa lista de referências a trabalhos tendo como foco principal (1) ou equações dela obtidas.

Recentemente [3,7,8,15], efeitos advindos da rotação da Terra (efeito de Coriolis) foram considerados na dedução da equação de CH, o que levou à obtenção do seguinte modelo:

$$u_t - u_{txx} = uu_{xxx} + 2u_x u_{xx} + (\alpha - 3u + \beta u^2 + \gamma u^3)u_x + \Gamma u_{xxx}. \tag{2}$$

Em (2) as constantes α, β, γ e Γ surgem em razão do efeito de Coriolis.

Embora a equação (2) seja fisicamente relevante, parte das propriedades matemáticas elencadas no começo da seção são perdidas, dentre elas, a existência de solitons fracos quando $(\beta, \gamma) \neq (0, 0)$. Por outro lado, os resultados em $[3, 4, 7, 8, 15]$ são suficientes para mostrar a relevância matemática de (2), o qual ainda exibe uma série de propriedades bastante interessantes e é fisicamente relevante.

Nosso objetivo neste trabalho é estudar a seguinte modificação de (2):

$$u_t - u_{txx} + \lambda(u - u_{xx}) = uu_{xxx} + 2u_x u_{xx} + (\alpha - 3u + \beta u^2 + \gamma u^3)u_x + \Gamma u_{xxx}, \tag{3}$$

em que todas as constantes envolvidas são reais, e λ é assumida como sendo negativa.

2 Simetrias de Lie e Leis de Conservação

Nesta seção assumimos que $u = u(x, t)$ é uma função suficientemente diferenciável, e que $E = E[x, t, u, u_{(n)}] = 0$ seja uma equação diferencial em u de ordem n.

Uma simetria de Lie da equação $E = 0$ é uma transformação contínua e a 1-parâmetro $(x, t, u) \mapsto (\overline{x}(x, t, u, \epsilon), \overline{t}(x, t, u, \epsilon), \overline{u}(x, t, u, \epsilon))$ que transforma soluções da equação em outras soluções da mesma equação. Para mais detalhes, veja $[1, 9, 13]$.

Exemplo 2.1. *Considere a transformação $(x, t, u) \mapsto (x, t + \epsilon, u)$ e seja $u = f(x, t)$ uma solução da equação* (1)*. Isso significa que a partir desta solução podemos construir uma outra, dada por $\overline{u}(x, t; \epsilon) = f(x, t + \epsilon)$.*

O conhecimento de simetrias permite que o número de variáveis independentes de uma equação seja reduzido. No caso particular de equações diferenciais parciais com duas variáveis, o conhecimento de uma simetria pode levar à obtenção de uma equação diferencial ordinária.

Exemplo 2.2. *É fácil ver que a equação* (1) *possui simetria translacional nas variávies x e t, ou seja, as transformações $(x, t, u) \mapsto (x, t + \epsilon, u)$ e $(x, t, u) \mapsto (x + \epsilon', t, u)$. Isso significa que podemos tentar encontrar soluções forma $u(x, t) = \phi(z)$, em que $z = x - ct$ e c é uma constante. Uma inspeção direta nos mostra que $u(x, t) = e^{x-ct}$ é solução de* (1)*.*

Um dos resultados que apresentaremos no evento pode ser apresentado agora, e sua demonstração pode ser feita utilizando-se os procedimentos usuais para o cálculo de simetrias de equações diferenciais $[1, 9, 13]$.

Teorema 2.1. *Uma base para os geradores de simetrias de Lie da equação* (3)*, para quaisquer valores das constantes, é dada pelos operadores diferenciais*

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial t}. \tag{4}$$

Se $\Gamma(\alpha + 3\Gamma) \neq 0$*, em adição a* (4) *temos o operador*

$$X_3 = (\alpha + 3\Gamma)t\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t} + (\alpha + \Gamma - 2u)\frac{\partial}{\partial u}.$$

Do ponto de vista geométrico, as transformações associadas aos geradores em (4) correspondem às translações discutidas nos exemplos 2.1 e 2.2, enquanto a transformação associada ao gerador X_3 é uma composição de dilatações nas variáveis t e u, compostas com um *boost* de Galileu.

Cabe destacar que a teoria de simetrias de Lie também nos dão ferramentas para se encontrar leis de conservação para equações. Em termos formais, uma lei de conservação para uma equação diferencial é uma expressão do tipo $D_tC^0 + D_xC^1 = 0$, válida nas soluções da equação. O vetor (C^0, C^1) é chamado vetor conservado.

Exemplo 2.3. *A equação* (2) *possui o seguinte vetor conservado [4]*

$$C^0 = \frac{u^2 + u_x^2}{2}$$

e

$$C^1 = u^3 - u^2u_{xx} - uu_{tx} + \Gamma\frac{u_x^2}{2} - \Gamma uu_{xx} - \alpha\frac{u^2}{2} - \beta\frac{u^4}{4} - \frac{\gamma}{5}u^5.$$

De fato, calculando a divergência deste vetor, encontramos

$$D_tC^0 + D_xC^1 = u\left(u_t - u_{txx} - uu_{xxx} - 2u_xu_{xx} - (\alpha - 3u + \beta u^2 + \gamma u^3)u_x + \Gamma u_{xxx}\right),$$

que se anula se u *é uma solução de* (2)*.*

Se (C^0, C^1) é um vetor conservado para uma equação do tipo (1) com domínio em $\mathbb{R}$ (na variável x), ou equações com o tempo, de modo geral, então o funcional

$$\mathcal{H} = \int_{\mathbb{R}} C^0 dx$$

é conservado. Este fato possui grandes implicações em propriedades estruturais da equação.

Exemplo 2.4. *Decorre do exemplo anterior que*

$$\mathcal{H} = \int_{\mathbb{R}} (u^2 + u_x^2)dx$$

é uma quantidade conservada da equação (2)*. Essa quantidade conservada nada mais é que o quadrado da norma de Sobolev no espaço* H^1*. Ou seja, sob certas condições sobre as soluções da equação, a quantia* $\|u\|_{H^1}$ *é conservada, significando que*

$$\frac{d}{dt}\|u\|_{H^1}^2 = \frac{d}{dt}\mathcal{H} = 0.$$

Aplicando as técnicas em [1, 9, 13] à equação (4), provamos o seguinte resultado:

Teorema 2.2. *A equação* (4) *possui multiplicadores até ordem 2 e, consequentemente, leis de conservação até este tipo de ordem, se, e somente se,* $\lambda = 0$*. Se* $\lambda = 0$*, então as leis de conservação e suas respectivas quantidades conservadas são aquelas obtidas em [4]. Se* $\lambda \neq 0$*, então as quantidades conservadas vão a* 0 *quando* $t \to \infty$*.*

3 Conclusão

Neste trabalho encontramos alguns grupos de simetrias da equação (4). Pelo Teorema 2.2, concluímos que se $\lambda \neq 0$, concluímos que o modelo descrito por (4) não conserva energia, de modo que a parcela $\lambda(u - u_{xx})$ corresponde a um termo de dissipação.

Agradecimentos

O autor agradece ao CNPQ (processos 308516/2016-8 e 404912/2016-8) pelo auxílio financeiro.

Referências

[1] G. W. Bluman and S. Kumei. *Symmetries and Differential Equations*, Springer, New York, 1989.

[2] R. Camassa, D.D. Holm. An integrable shallow water equation with peaked solitons, *Phys. Rev. Lett.*, 71:1661–1664, 1993.

[3] R. M. Chen, G. Gui and Y. Liu. On a shallow-water approximation to the Green–Naghdi equations with the Coriolis effect, *Adv. Math.*, 340:106–137, 2018.

[4] P. L. da Silva and I. L. Freire. Well-posedness, travelling waves and geometrical aspects of generalizations of the Camassa-Holm equation, *arXiv:1902.00601*, 2019.

[5] H. Dullin, G. Gottwald, D. Holm. An integrable shallow water equation with linear and nonlinear dispersion, *Phys. Rev. Lett.*, 87, Article 194501, 2001.

[6] J. Escher. Breaking water waves. Nonlinear Water Waves, *Lecture Notes in Mathematics*, Springer, volume 2158, pages 83–118, 2016.

[7] G. Gui, Y. Liu and J. Sun. A nonlocal shallow-water model arising from the full water waves with the Coriolis effect, *arXiv:1801.04665*, 2018.

[8] G. Gui, Y. Liu and T. Luo. Model equations and traveling wave solutions for shallow-water waves with the Coriolis effect, *J. Nonlin. Sci.*, 2018. DOI: doi.org/10.1007/s00332-018-9510-x.

[9] N. H. Ibragimov. *Elementary Lie Group Analysis and Ordinary Differential Equations*, John Wiley and Sons, United Kingdom, 1999.

[10] T. Kato. Quasi-linear equations of evolution, with applications to partial differential equations. *Spectral theory and differential equations, Proceedings of the Symposium Dundee* Springer Lecture Notes in Mathematics, volume 448, pages 161–166. 1975.

[11] X. Liu and Z. Yin. Local well-posedness and stability of peakons for a generalized Dullin–Gottwald–Holm equation, *Nonlin. Anal.*, 74:2497–2507, 2011.

[12] O. G. Mustafa. On the Cauchy problem for a generalized Camassa–Holm equation, *Nonlin. Anal.*, 64:1382–1399, 2006.

[13] P. J. Olver. *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, Springer, New York, 1993.

[14] G. Rodriguez-Blanco. *On the Cauchy problem for the Camassa–Holm equation*, Nonlinear Anal., 46: 309–327, 2001.

[15] X. Tu, Y. Liu, C. Mu. Existence and uniqueness of the global conservative weak solutions to the rotation-Camassa–Holm equation, *J. Diff. Equ.*, 2018. DOI: 10.1016/j.jde.2018.10.012.

[16] S. Wu, Z. Yin. Blow-up, blow-up rate and decay of the solution of the weakly dissipative Camassa-Holm equation, *J. Math. Phys.*, 47: paper 013504, 2006.

[17] S. Wu and Z. Yin. Global existence and blow-up phenomena for the weakly dissipative Camassa–Holm equation, *J. Diff. Equ.*, 246:4309–4321, 2009.

