Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 7, n. 1, 2020.

Trabalho apresentado no XXXIX CNMAC, Uberlândia - MG, 2019.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

---

Simetrias de uma Família de Sistemas Elíptico-Hiperbólicos

Igor Leite Freire[1]
Centro de Matemática, Computação e Cognição, UFABC
Bruno Rogério Locatelli[2]
Centro de Matemática, Computação e Cognição, UFABC
Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia, UFGD

Resumo. Neste trabalho, determinamos os grupos de simetrias de Lie de uma família de sistemas elíptico-hiperbólicos. Além disso, algumas simetrias de Noether foram discutidas.

Palavras-chave. Simetrias de Lie, Simetrias de Noether, Sistemas de Equações Diferenciais, Sistemas de Lane-Emden.

1 Introdução

Sejam $u = u(r, \rho)$ e $v = v(r, \rho)$ funções definidas em $\mathbb{R}^2$ e tomando valores reais, as quais assumiremos ser suficientemente diferenciáveis.

Consideremos a função

$$L = u_r v_r + r^{2\gamma} u_\rho v_\rho + F(u) + G(v), \tag{1}$$

em que $F(\cdot)$ e $G(\cdot)$ são funções diferenciáveis. Seja E_w o operador de Euler-Lagrange (para mais detalhes e definições, veja [2,4]). Aplicando os operadores E_u e E_v em (1), com $F(u) = u^{q+1}/(q+1)$, $G(v) = v^{p+1}/(p+1)$, com $p, q \notin \{0, 1\}$, obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais parciais

$$\begin{cases} u_{rr} + r^{2\gamma} u_{\rho\rho} \,=\, v^p, \\ \\ v_{rr} + r^{2\gamma} v_{\rho\rho} \,=\, u^q. \end{cases} \tag{2}$$

O sistema (2) é elíptico na região $\{(r, \rho),\, r \neq 0\}$ e hiperbólico em seu complementar. Em [1] certas propriedades de equações do tipo (2) são estudadas e propriedades do operador no primeiro membro de (2) são apresentadas. Neste trabalho também se pode conferir a relevância deste tipo de sistema no estudo de equações com operadores subelípticos.

O objetivo deste trabalho é discutir propriedades de invariância do sistema (2), dando continuidade aos resultados apresentados em [5]. Mais precisamente, neste trabalho apresentaremos um teorema completo de classificação de grupos de simetrias de (2), e também algumas condições necessárias para se obter leis de conservação associadas a (2).

[1] igor.freire@ufabc.edu.br
[2] bruno.locatelli@ufabc.edu.br / brunolocatelli@ufgd.edu.br

2 Simetrias de Lie e suas consequências

Nesta seção apresentamos um teorema de classificação de simetrias de Lie para o sistema (2).

Uma simetria de Lie do sistema (2) é uma transformação

$$(r,\rho,u,v) \mapsto (\overline{r}(r,\rho,u,v,\epsilon),\overline{\rho}(r,\rho,u,v,\epsilon),\overline{u}(r,\rho,u,v,\epsilon),\overline{v}(r,\rho,u,v,\epsilon)), \tag{3}$$

dependendo continuamente de ϵ, com a seguinte propriedade: uma simetria transforma uma solução de uma equação em outra solução da mesma equação. Além disso, a composição de simetrias é sempre uma simetria e cada simetria admite uma inversa. Essas propriedades dão ao conjunto das simetrias uma estrutura de grupo e, em particular, na identidade do grupo, que sempre pode ser assumida como sendo 0, temos a transformação identidade.

A transformação (3) pode ser assumida como analítica na variável ϵ, de modo que expandindo cada componente de (3) em ϵ, temos

$$\begin{cases} \overline{r} \,=\, r+\epsilon\xi^1+O(\epsilon^2), \\ \\ \overline{\rho} \,=\, \rho+\epsilon\xi^2+O(\epsilon^2), \\ \\ \overline{u} \,=\, u+\epsilon\eta^1+O(\epsilon^2), \\ \\ \overline{v} \,=\, v+\epsilon\eta^2+O(\epsilon^2). \end{cases} \tag{4}$$

As funções $\xi^1=\xi^1(r,\rho,u,v)$, $\xi^2=\xi^2(r,\rho,u,v)$, $\eta^1=\eta^1(r,\rho,u,v)$ e $\eta^2=\eta^2(r,\rho,u,v)$ definem um operador linear

$$X=\xi^1\frac{\partial}{\partial r}+\xi^2\frac{\partial}{\partial \rho}+\eta^1\frac{\partial}{\partial u}+\eta^2\frac{\partial}{\partial v}, \tag{5}$$

que é chamado gerador infinitesimal do grupo de simetrias do sistema (2) se sua extensão de segunda ordem (para mais detalhes, veja [2,4]) satisfaz a chamada condição de invariância.

A condição acima mencionada nos fornece um conjunto sobredeterminado de equações diferenciais parciais lineares, chamadas de *equações determinates*, em ξ^1, ξ^2, η^1 e η^2, cuja solução nos dá o grupo de simetrias da equação. Em particular, temos o seguinte resultado.

Teorema 2.1. *As equações determinantes do sistema* (2) *são:*

$$\xi^1_u=0,\ \ \xi^1_v=0,\ \ \xi^2_u=0,\ \ \xi^2_v=0, \tag{6}$$

$$\eta_{1,uu}=0,\ \ \eta_{1,uv}=0,\ \ \eta_{1,vv}=0,\ \ \eta_{1,rv}=0,\ \ \eta_{1,\rho v}=0, \tag{7}$$

$$\eta_{2,uu}=0,\ \ \eta_{2,uv}=0,\ \ \eta_{2,vv}=0,\ \ \eta_{2,ru}=0,\ \ \eta_{2,\rho u}=0, \tag{8}$$

$$r^{2\gamma}\xi^1_\rho + \xi^2_r = 0, \tag{9}$$

$$r(\xi^2_\rho - \xi^1_r) = \gamma\xi^1, \tag{10}$$

$$2\eta_{1,ru} = r^{2\gamma}\xi^1_{\rho\rho} + \xi^1_{rr}, \tag{11}$$

$$2\eta_{2,rv} = r^{2\gamma}\xi^1_{\rho\rho} + \xi^1_{rr}, \tag{12}$$

$$2\gamma\xi^1_\rho + r(2\eta_{1,\rho u} - \xi^2_{\rho\rho} + \xi^1_{r\rho}) = 0, \tag{13}$$

$$2\gamma\xi^1_\rho + r(2\eta_{2,\rho v} - \xi^2_{\rho\rho} + \xi^1_{r\rho}) = 0, \tag{14}$$

$$v(u^q\eta_{1,v} + v^p\eta_{1,u} + r^{2\gamma}\eta_{1,\rho\rho} - 2v^p\xi^1_r + \eta_{1,rr}) - pv^p\eta_2 = 0, \tag{15}$$

$$u(u^q\eta_{2,v} + v^p\eta_{2,u} + r^{2\gamma}\eta_{2,\rho\rho} - 2u^q\xi^1_r + \eta_{2,rr}) - qu^q\eta_1 = 0. \tag{16}$$

Resolvendo o sistema (6)–(16), provamos o seguinte resultado.

Teorema 2.2. *Para quaisquer valores de p, q, γ uma base para os geradores de simetrias de Lie do sistema (2) é dada pelos operadores*

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial\rho} \tag{17}$$

e

$$X_2 = (1-pq)r\frac{\partial}{\partial r} + (1-pq)(1+\gamma)\rho\frac{\partial}{\partial\rho} + 2(1+p)u\frac{\partial}{\partial u} + 2(1+q)v\frac{\partial}{\partial v}. \tag{18}$$

Para alguns valores de p, q e γ, o grupo de simetrias de Lie pode ser ampliado. Abaixo listamos os casos e os geradores adicionais a (17) e (18):

1. *Se $p = q = -1$ e $\gamma \neq 0$, o gerador é:*

$$X_3 = u\frac{\partial}{\partial u} - v\frac{\partial}{\partial v}. \tag{19}$$

2. *Se $p \neq q$ e $\gamma = 0$, os geradores são:*

$$X_4 = \frac{\partial}{\partial r} \tag{20}$$

e

$$X_5 = \rho\frac{\partial}{\partial r} - r\frac{\partial}{\partial\rho}. \tag{21}$$

3. *Se* $P = q = -1$ *e* $\gamma = 0$*, os geradores são:* (17)*,* (20) *e* (21)*.*

Uma consequência imediata do Teorema 2.2 é que o operador (17) é sempre um gerador do grupo de simetrias de (2). Geometricamente, isso significa que transformações do tipo $(r, \rho, u, v) \mapsto (r, \rho + \epsilon, u, v)$ transformam soluções de (2) em outras soluções do mesmo sistema, ou seja, se $u = f(r, \rho)$ e $v = g(r, \rho)$ são soluções de (2), então, $u_\epsilon = f(r, \rho + \epsilon)$ e $v_\epsilon = g(r, \rho + \epsilon)$ são soluções de (2) (para todo ϵ, em particular).

Uma vez que se tenha o grupo de simetrias de Lie de um sistema, e ele possua estrutura variacional (o que é o caso do presente trabalho), é natural se questionar se tal sistema possui simetrias de Noether. Tais simetrias são relevantes porque sua existência implica na existência de leis de conservação, que podem ser construída de uma forma bastante simples e elegante utilizando-se tais simetrias. Para mais detalhes, veja [2, 4].

Nosso próximo resultado mostra a existência de ao menos uma simetria de Noether para (2).

Teorema 2.3. *O gerador de simetrias de Lie* (17) *é sempre um gerador de um grupo de simetrias de Noether para o sistema* (2)*.*

3 Conclusões

Neste trabalho é apresentado os seguintes resultados acerca do sistema (2):

- suas simetrias de Lie, ou seja, transformações agindo no espaço de coordenadas (r, ρ, u, v) deixando invariantes suas soluções. Mais precisamente, estas simetrias nada mais são que uma classificação do grupo de invariância admitido pelo sistema (2) e dado pelo Teorema 2.2;

- suas simetrias de Noether, ou seja, transformações preservando os funcionais de ação. Em particular, o Teorema 2.3 nos assegura que as translações $(r, \rho, u, v) \mapsto (r, \rho + \epsilon, u, v)$ são sempre simetrias de Noether do sistema;

- como consequência das simetrias de Noether, apresentaremos também suas correspondentes leis de conservação, o que nos dão propriedades importantes acerca das soluções do sistema.

Por fim, gostaríamos de mencionar que o sistema (2), com $\gamma = 0$, é um sistema do tipo Lane-Emden em dimensão 2, veja [3]. Este trabalho, portanto, generaliza os resultados apresentados em [3] com respeito a simetrias de Lie e suas consequências.

Agradecimentos

O segundo autor agradece à UFGD pelo afastamento concedido para cursar o doutorado. O primeiro autor agradece ao CNPq (processos $404912/2016-8$ e $308516/2016-8$) pelo auxílio financeiro.

Referências

[1] L. D'Ambrosio. Hardy Type Inequalities Related to Degeneration Elliptic Differential Operators. *Ann. Scuola Norm. Pisa CL. Sci*, 4:451-486, 2005.

[2] G. W. Bluman and S. Anco, *Symmetry and Integration Methods for Differential Equations, Applied Mathematical Sciences*, Springer, 154, 2002.

[3] Y. Bozhkov and I. L. Freire, Symmetry analysis of the bidimensional Lane Emden systems, *J. Math. Anal. Appl.*, 388:1279-1284, 2012.

[4] N. H. Ibragimov, *Elementary Lie group Analysis and Ordinary Differential Equations*, John Wiley and Sons, 1999.

[5] I. L. Freire e B. R. Locatelli, Simetrias de uma família de sistemas de equações, *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, volume 6, 2018.

DOI: 10.5540/03.2020.007.01.0433