

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Solução numérica do modelo de Brinkman através do método de volumes finitos

Anna Caroline Felix Santos de Jesus ¹

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo (ICMC/USP)

Fabrício Simeoni de Sousa ²

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo (ICMC/USP)

1 Introdução

O modelo de Brinkman é aplicado a meios que possuem uma estrutura de transição entre um meio poroso e um outro meio em que as forças inerciais podem ser ignoradas. H. C. Brinkman [1], fez uma importante observação em 1949 que adicionou o termo viscoso $\mu'\nabla^2\mathbf{u}$ a equação de Darcy resultando no seguinte modelo para escoamento incompressível

$$\mu'\nabla^2\mathbf{u} + \mu\mathbf{K}^{-1}\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \quad \text{em } \Omega, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \text{em } \Omega, \quad (2)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{g}, \quad \text{em } \partial\Omega. \quad (3)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aberto e limitado. Neste modelo, p é a pressão do fluido, \mathbf{u} representa a velocidade, \mathbf{K} é o tensor permeabilidade do meio poroso, e pode ser altamente heterogêneo, μ é a viscosidade do fluido, μ' é a chamada viscosidade efetiva do fluido e \mathbf{f} denota o termo força. Escolhendo os parâmetros apropriadamente, pode-se estudar o comportamento do modelo para os casos limites, onde: para $K_{ij} \rightarrow \infty$, obtemos o fluxo de Stokes e para $K_{ij} \rightarrow 0$, temos o fluxo de Darcy. Além disso, na literatura, é frequentemente assumido que $\mu = \mu'$.

2 O método dos volumes finitos

A aplicação do método dos volumes finitos consiste basicamente em subdividir o domínio do problema em volumes de controle contíguos e integrar a equação diferencial em cada volume de controle. A discretização do modelo de Brinkman descrito pelas equações (1) - (3) é realizada em uma malha deslocada, onde as incógnitas de pressão são computadas nos centros dos volumes de controle, enquanto que as velocidades são aproximadas nas faces dos volumes. As viscosidades e permeabilidade são consideradas constante em cada volume. As equações uma vez discretizadas dão origem a um sistema acoplado resolvido de forma monolítica com o auxílio do software MATLAB.

¹carolinefelix@usp.br

²fsimeoni@icmc.usp.br

3 Experimentos numéricos

Ainda há discussões em andamento sobre a validade e as aplicações das equações de Brinkman como um modelo de fluxos em meios porosos com valores mais elevados da porosidade. No entanto, o sistema de equações de Brinkman é um modelo conveniente de fluxos em meios porosos altamente heterogêneos com distribuição aleatória de obstáculos, canais, cavidades e outras características geofísicas [2]. Diante deste fato, considerou-se o campo de permeabilidade heterogêneo de alto contraste, $(K_{max}/K_{min} \sim 10^{10})$ mostrado na Figura 1(a) para um domínio bidimensional $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$. A condição de contorno utilizada é $\mathbf{g} = (1, 0)$ e para as viscosidades adotou-se $\mu' = \mu = 0.001$.

Um dos testes realizados foi um estudo empírico de convergência calculando soluções em malha de 20^2 , 40^2 , 80^2 e 160^2 . Depois de obtidas as soluções verificou-se a convergência em norma $L^2(\Omega)$ comparando com a solução de referência gerada a partir de uma malha de 320^2 . A magnitude do campo de velocidade obtido para uma malha de 320^2 é mostrado na Figura 1(b). O gráfico do decaimento do erro em função de h usando a norma $L^2(\Omega)$ é ilustrada na Figura 1(c) e permite concluir que o método implementado é de ordem h^2 tanto para pressão quanto para a velocidade.

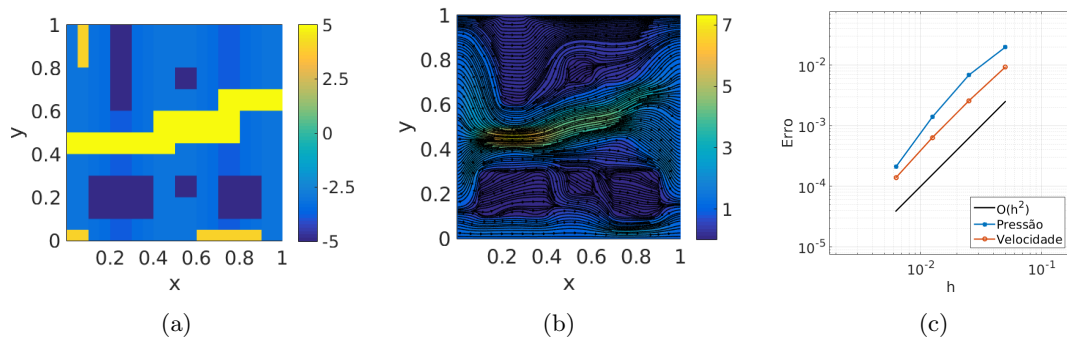


Figura 1: (a) Permeabilidade em escala logarítmica: regiões amarelas denotam alta permeabilidade e as tonalidades azuladas baixa permeabilidade. (b) Campo de velocidade, colorido pela magnitude. (c) Decaimento do erro com relação a h , em escala logarítmica.

Mais resultados de verificação do método de volumes finitos para o modelo de Brinkman serão apresentados durante a conferência, bem como estudos mais recentes sobre a validade de métodos de decomposição de domínio multiescala aplicados a este modelo.

Agradecimentos

À FAPESP, processo n^o 18/13028-4 pelo apoio financeiro.

Referências

- [1] H. C. Brinkman, A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles, *Appl. Sci. Res.*, 1:27-34. 1949.
- [2] G. Kanschat, R. Lazarov and Y. Mao, Geometric Multigrid for Darcy and Brinkman models of flows in highly heterogeneous porous media: A numerical study, *J. Comput. Appl. Math.*, 310:174-185, 2017.