Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 7, n. 1, 2020.

Trabalho apresentado no XXXIX CNMAC, Uberlândia - MG, 2019.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Aplicação do Método *Averaging* ao Sistema de Vallis (Fenômeno El Niño)

Dionatan Schmidt [1]
Programa de Pós Graduação em Matemática Aplicada - PPGMAp, UFRGS, Porto Alegre, RS
Maurício Fronza [2]
Departamento de Matemática, UFSM, Santa Maria, RS

1 Introdução ao Método

O método do *Averaging* é uma ferramenta para o estudo de sistemas não lineares com coeficientes periódicos. O método consiste essencialmente em associar ao sistema de EDO's em estudo, um novo sistema chamado de sistema promediado, de modo que cada singularidade do sistema promediado esteja associada a uma órbita periódica do sistema original. A estabilidade das órbitas periódicas do sistema original é determinada pela estabilidade das singularidades do sistema promediado.

Consideremos o sistema diferencial

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \epsilon F(t, \mathbf{x}) + \epsilon^2 R(t, \mathbf{x}, \epsilon), \tag{1}$$

com $\mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^n$, D um conjunto aberto, limitado e conexo, e $t \geq 0$. Além disso, assumimos que $F(t, \mathbf{x})$ e $R(t, \mathbf{x}, \epsilon)$ são T-periódicas em t, com $\epsilon_0 > 0$ e $\epsilon \in (-\epsilon_0, \epsilon_0)$.

O **sistema promediado** associado ao sistema (1) é definido por

$$\dot{\mathbf{z}} = \epsilon f^0(\mathbf{z}), \tag{2}$$

onde a função $f^0 : D \to \mathbb{R}^n$ é dada por

$$f^0(\mathbf{z}) = \frac{1}{T} \int_0^T F(t, \mathbf{z}) dt. \tag{3}$$

Chamamos f^0 de **função promediada** associada a (2).

[1]dionatansp@yahoo.com.br
[2]mauriciofronzadasilva@gmail.com

2 Adaptação ao sistema de Vallis (Fenômeno El Niño)

O sistema Vallis, introduzido por Vallis [3] em 1988, é um sistema não autônomo periódico que modela a dinâmica da atmosfera nos trópicos sobre o Oceano Pacífico, relacionado às oscilações anuais de precipitação, temperatura e força do vento. Denotando por x a força do vento, por y a diferença das temperaturas da água próxima à superfície das partes leste e oeste do Oceano Pacífico, e por z a temperatura média da água próxima da superfície, o sistema Vallis é

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -ax + by + u(t), \\ \frac{dy}{dt} &= -y + xz, \\ \frac{dz}{dt} &= -z + xz + 1, \end{aligned} \tag{4}$$

onde $u(t)$ é uma função T-periódica C^1, que descreve a força do vento sob movimentos sazonais de massas de ar, e os parâmetros a e b são positivos.

Vamos fornecer condições suficientes para que o sistema (4) tenha órbitas periódicas e adicionalmente caracterizamos a estabilidade dessas órbitas periódicas, definindo

$$I = \int_0^T u(s)ds \tag{5}$$

Teorema 2.1. *Para $I \neq 0$ e $a \neq b$ o sistema de Vallis* (4) *tem uma T-periódica solução* $(x(t), y(t), z(t)) \approx \left(\frac{aI}{T(a-b)}, \frac{aI}{T(a-b)}, 1\right)$, *Além disso, está órbita periódica é estável se $a > b$ e instável se $a < b$.*

Para demonstrar do Teorema (2.1), e consequentemente estudar as soluções periódicas do sistema diferencial (4), utiliza-se uma mudança das variáveis (x, y, z), da função $u(t)$, e dos parâmetros a e b, do seguinte modo

$$\begin{aligned} x =& \epsilon^{m_1} X, & y = \epsilon^{m_2} Y, \quad & z = \epsilon^{m_3} Z, \\ u(t) =& \epsilon^{n_1} U(t), & a = \epsilon^{n_2} A, \quad & b = \epsilon^{n_3} B, \end{aligned} \tag{6}$$

onde ϵ sempre é positivo e suficientemente pequeno, e m_i e n_j são inteiros não negativos, escolhidos convenientemente, para todos $i, j = 1, 2, 3$.

Referências

[1] R. D. Euzébio and J. Llibre. *Periodic Solutions of El Niño Model through the Vallis Differential System.* to appear in Discrete and Contin. Dyn. System, Series A, 2014.

[2] J. A. Sanders, F. Verhulst and J. Murdock. *Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems. 3a. edição.* Springer, New York, 2007.

[3] G. K. Vallis. *Conceptual models of El Niño and the southern oscillation.* J. Geophys. Res. 93, 13979–13991, 1988.