Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 7, n. 1, 2020.

Trabalho apresentado no XXXIX CNMAC, Uberlândia - MG, 2019.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Estudo do ω Ótimo no Método de Sobre Relaxação Sucessiva em Matrizes Tridiagonais

Wesliane Maia do Amaral[1]
João Paulo Rufino Gurgel Viana[2]
Modesto Valci Moreira Lopes[3]
Hedjany Sena da Silva[4]
Ivan Mezzomo[5]
Matheus da Silva Menezes[6]
Departamento Ciências Naturais, Matemática e Estatística, UFERSA, Mossoró, RN

1 Referencial Teórico

É possível encontrar sistemas de equações lineares associados diretamente a situações em várias áreas de estudo, como por exemplo, administração, economia, engenharia, ciência da computação, entre outros. Os métodos numéricos tem o objetivo de nos auxiliar na obtenção das soluções desses sistemas de equações lineares. Conforme [2], os métodos de Sub e Sobre Relaxação Sucessiva são estacionários e derivados do método de Gauss-Seidel, tendo como diferencial um fator de correção ω que é aplicado na função de iteração do método de Gauss-Seidel com o objetivo de acelerar a convergência. A equação de iteração dos métodos de relaxação sucessiva é dada por:

$$x_i^{(k)} = \frac{\omega}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j<i}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j>i}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} \right] + (1-\omega) x_i^{(k-1)}. \tag{1}$$

Segundo [1], dentre os métodos de relaxação, o método de Sobre Relaxação Sucessiva (SRS) é o que apresenta melhor eficiência em relação ao número de iterações e ao tempo necessário para convergência. Além disso, é possível calcular um valor ótimo para ω em matrizes definida positiva e tridiagonais, de maneira particular para cada problema [1]. O objetivo desse trabalho é calcular o valor ótimo de ω, dado pela Eq. (2), e verificar a veracidade dessa afirmação através do método SRS, para valores de ω pré determinados em cada problema. Ainda de acordo com [1], o valor de ω pode ser calculado em função do raio espectral de uma matriz T, definido por $\rho(T) = \max|\lambda|$, onde λ são os autovalores da matriz T, conforme dado no teorema a seguir:

Teorema 1: [1] *Se A for uma matriz definida positiva e tridiagonal, então $\rho(T_g) = [\rho(T_j)]^2 < 1$, e a escolha ótima de ω para o método Sobre Relaxação Sucessiva será*

[1] weslianemaia1@gmail.com
[2] paulo.joao5@hotmail.com
[3] modsval@gmail.com
[4] hedjany@icloud.com
[5] imezzomo@ufersa.edu.br
[6] matheus@ufersa.edu.br

$$\omega = \frac{2}{1+\sqrt{1-[\rho(T_j)]^2}} \tag{2}$$

onde a matriz A é decomposta em D é uma matriz diagonal, L uma matriz triangular inferior e U uma matriz triangular superior, $T_g = (D-L)^{-1}U$ e $T_j = D^{-1}(L+U)$.

2 Resultados e Discussões

Para realização dos testes foram utilizadas cinco matrizes definida positiva e tridiagonais, extraídas dos repositórios Matrix Market e Florida Sparse Matrix Collection. Além do ω calculado através da Eq. (2), foram adotados outros quatro valores arbitários para ω em cada matriz, visando comparar seu desempenho quanto ao número de iterações e ao tempo de processamento. Os resultados foram obtidos através da utilização do software Scilab, com critério de parada 3000 iterações ou a distância relativa, com precisão de $\varepsilon = 10^{-4}$. Os valor de ω calculado através da Eq. (2) para a matriz NOS1 foi 1,90, para as matrizes NOS7 e GR_30_30 foi 1,99 e para a matriz NOS2 foi 1,91, conforme destacamos em vermelho o número de iterações e tempo de processamento na tabela abaixo.

Tabela 1: Resultado dos experimentos realizados

Problema	Ord.	# Iter.					Tempo (seg)				
ω		1,80	1,85	1,90	1,95	1,99	1,80	1,85	1,90	1,95	1,99
NOS1	237	354	270	178	79	79	234,1	178,9	118,4	53,1	52,9
NOS7	729	41	57	87	181	875	272	376	566	1178	5595
GR_30_30	900	42	48	72	131	617	451	490	749	1392	6389
ω		1,80	1,85	1,91	1,95	1,99	1,80	1,85	1,91	1,95	1,99
NOS2	957	2651	2180	1511	970	316	39980	32435	16791	10822	3473

Analisando a tabela acima, podemos verificar que em todas as matrizes estudadas, o valor de ω calculado pela Eq. (2) apresentou valor maior ou igual a $1,90$. Levando em consideração os critérios de análises adotados nesse trabalho, percebemos que em todos os problemas analisados, o valor de ω calculado pela Eq. (2) não foi o mais eficiente em relação aos valores de ω pré determinados arbitráriamente, tanto em relação ao número de iterações quanto ao tempo de processamento. O valor de ω calculado foi menos eficiente do que o melhor valor de ω pré determinado de 55,62% a 95,31%, quanto ao número de iterações e entre 55,25% a 95,13% em relação ao tempo de processamento. Desta forma, podemos concluir que o valor de ω calculado pela Eq. (2) não é o valor ótimo, tanto quanto ao número de iterações quanto ao tempo de processamento, para os problemas analisados neste trabalho.

Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio da UFERSA e do CNPq na execução deste trabalho.

Referências

[1] R. L. Burden, D. Faires and A. M. Burden. *Análise Numérica, 3a edição*. Cengage Learning, São Paulo, 2015.

[2] M. A. G. Ruggiero, V. L. R. Lopes. *Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais, 2a edição*. Makron Books, São Paulo, 1996.

[3] MatrixMarket, disponível em https://math.nist.gov/MatrixMarket. Acesso em: 26 de abril de 2019.

[4] Florida Sparse Matrix Collection, disponível em: https://sparse.tamu.edu. Acesso em: 26 de abril de 2019.