

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Ajuste de parâmetros em um modelo de ordem fracionária

Lislaine Cristina Cardoso¹

Departamento de Bioestatística, UNESP, Botucatu, SP

Fernando Luiz Pio dos Santos²

Departamento de Bioestatística, UNESP, Botucatu, SP

Rubens de Figueiredo Camargo³

Departamento de Matemática, UNESP, Bauru, SP

A técnica de estimação de parâmetros é apresentada como um problema de otimização sobre uma função objetivo na forma de mínimos quadrados. O método de mínimos quadrados consiste em minimizar o quadrado da diferença entre o valor do modelo e o valor experimental. Em tais problemas, havendo um conjunto de dados disponíveis, escolhe-se um modelo matemático e busca-se minimizar a soma dos quadrados das distâncias, denominadas resíduos, entre cada um dos pontos dados e a curva ajustada. Em outras palavras, os parâmetros do modelo matemático devem ser estimados de maneira a minimizar a distância entre o valor teórico predito e o valor experimental. Desta forma, após a estimação, a função objetivo deve apresentar um valor mínimo [7].

Recentemente, é notável o interesse na estimação de parâmetros de modelos de ordem não inteira. Além disso, é crescente o interesse na estimação da ordem da derivada fracionária que melhor ajusta os dados reais. Em [8] os autores mostram que sistemas de ordem arbitrária ajustam melhor dados reais se comparados a modelos de ordem inteira. Técnicas para estimar parâmetros em um sistema fracionário são similares àquelas usadas em modelos de ordem inteira e podem ser vistas em [1, 9].

O cálculo de ordem arbitrária, tradicionalmente conhecido como cálculo fracionário, lida especificamente com derivadas e integrais de ordens não inteiras. Embora pareça ser uma teoria antiga, pois remonta ao século XVII, os avanços ainda são recentes. Nas últimas quatro décadas houve um aumento significativo em pesquisas relacionadas a aplicações do CF, em diversas áreas, desde a física até a medicina [3].

Nesse contexto, o objetivo desse trabalho é fazer a estimação de alguns parâmetros para um modelo matemático de ordem não inteira, que descreva a infecção pelo vírus HBV, o qual causa a hepatite B [2, 4, 5]. O modelo matemático é apresentado a seguir

$$\begin{cases} D^\alpha T(t) &= s - dT(t) - (1 - \eta)\beta V(t)T(t) + \rho I(t) \\ D^\alpha I(t) &= (1 - \eta)\beta V(t)T(t) - \delta I(t) - \rho I(t) \\ D^\alpha V(t) &= (1 - \epsilon)pI(t) - cV(t). \end{cases} \quad (1)$$

¹lislaine.cardoso@unesp.br

²fernando.pio@unesp.br

³rubens.camargo@unesp.br

em que D^α representa a derivada de Caputo de ordem α , $0 < \alpha \leq 1$, e $T(t)$, $I(t)$ e $V(t)$, são as células não infectadas, células infectadas e vírus livres, respectivamente. Além disso são considerados os parâmetros: d é a taxa de morte de células, δ' a taxa de morte de células infectadas, ρ a taxa de cura, c a taxa de liberação de vírus livres, p é a taxa de produção de vírus por célula infectada, β a taxa de infecção de novas células infectadas, s a taxa de produção de novas células alvo e η , ϵ representam a eficácia e a eficiência da medicação em bloquear novas infecções. Detalhes sobre a fracionalização do modelo, bem como estudo detalhado acerca de análise de estabilidade podem ser vistos em [4].

Com base nesse modelo (1), nos dados reais publicados em [6], e usando a técnica descrita em [5], serão estimados os parâmetros $c, p, \epsilon, \delta', \alpha$.

Referências

- [1] S. Ahmed, **Parameter and delay estimation of fractional order models from step response**, International Federation of Automatic Control, v. 48, p. 942–947, 2015,
- [2] Boletim Epidemiológico “**Hepatites Virais**”, Secretaria de Vigilância em Saúde, vol. 49, 2018.
- [3] R. F. Camargo, E. C. Oliveira “**Cálculo Fracionário**”, Editora Livraria da Física, São Paulo, Brasil, 2015.
- [4] L. C. Cardoso, F. L. P. dos Santos, R. F. Camargo. **Analysis of fractional-order models to Hepatitis B**. Computational and Applied Mathematics, v. 04, p. 1-17, 2018.
- [5] L. C. Cardoso **Um modelo matemático para hepatite B por meio da derivada fracionária de Caputo**, Tese de doutorado, Programa de Pós graduação em Biometria, UNESP, Botucatu, 2019.
- [6] S. R. Lewin, R. M. Ribeiro, T. Walters and G. K. Lau. Analysis of Hepatitis B viral load decline under potent therapy: complex decay profiles observed. *Hepatology*, 34: 1012–1019, 2001.
- [7] K. Madsem and H. B. Nielsen and O. R. Tingleff, **Methods for nonlinear least square problems**, Informatics and Mathematical Modelling, University of Denmark, p. 1–30, 2004.
- [8] R. Mansouri and M. Bettayeb and S. Djennoune, **Approximation of high order integer systems by fractional order reduced parameter models**, Mathematical and Computer Modelling, v. 51, 2010.
- [9] A. S. Dos Santos and F. L. Pio dos Santos, **A novel technique to estimate biological parameters in an epidemiology problem**, Rojas I., Joya G., Catala A. (eds) Advances in Computational Intelligence. IWANN 2017. Lecture Notes in Computer Science, v. 10305, p. 112–122, 2017.