Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 7, n. 1, 2020.

Trabalho apresentado no XXXIX CNMAC, Uberlândia - MG, 2019.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Rainha das Funções Especiais

Vitor Henrique Lopes Gusson[1]
Licenciatura em Matemática, FC, UNESP, Bauru, SP
Rubens de Figueiredo Camargo[2]
Departamento de Matemática, FC, UNESP, Bauru, SP

1 Introdução

É natural, ao estudar alguma área de pesquisa que envolva inúmeras classes de funções, que existam funções mais recorridas e mais importantes que outras. Estas funções podem ser chamadas de funções especiais, por apresentarem um notável papel em uma teoria.

O Cálculo Fracionário, CF, nomenclatura para o cálculo de ordem não inteira, teve seu início, em 1695, com uma troca de correspondências entre Leibniz [1646-1716] e l'Hôpital [1661-1704], tendo Leibniz formulado uma possível generalização de uma derivada de ordem inteira para arbitrária como visto em [1].

Assim como o cálculo usual possui várias classes de funções, o CF não é diferente. Ele apresenta e necessita de funções, ditas especiais, por serem imprescindíveis em sua construção e em aplicações. Dentre as funções que constituem o CF, a mais importante delas é a Função de Mittag-Leffler, FML, pois, além de generalizar outras funções como a função erro, gama, hipergeométrica confluente, dentre outras, ela desempenha um papel fundamental no CF e nas soluções de Equações Diferenciais Fracionárias (EDFs) por generalizar a função exponencial como um caso particular e possuir propriedades equivalentes. Por isso, a FML é nomeada como "Rainha das funções especiais" por alguns pesquisadores, como encontrado em [2].

2 Função de Mittag-Leffler e sua importância no CF e na solução de EDFs com coeficientes constantes

A Função de Mittag-Leffler de um parâmetro foi introduzida por Magnus Gösta Mittag-Leffler, em 1903. É dada por uma série de potências que envolve a função especial Gama, que é uma generalização da função fatorial para valores arbitrários, sendo $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ e quando $z = n$ natural, $\Gamma(n+1) = n!$. Esta função possui diversas generalizações com até m parâmetros.

[1] vitor.gusson@unesp.br
[2] rubens.camargo@unesp.br

Definição 2.1. *Sejam* $t, \alpha \in \mathbb{C}$ *com* $Re(\alpha) > 0$*, a FML de um parâmetro é dada por*

$$E_\alpha(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}. \tag{1}$$

Quando $\alpha = 1$, recuperamos a representação em série de potências da função exponencial.

No cálculo usual, temos que a única função cuja derivada é dada como múltipla da própria função é a exponencial. Essa é sua principal propriedade no cálculo. Ao resolvermos uma equação diferencial com coeficientes contantes, ou seja, equações que envolvem as derivadas e suas múltiplas, é natural e evidente que a solução tenha exponenciais e múltiplos, como solução.

No CF, a derivada fracionária segundo Caputo da Função de Mittag-Leffler é também múltipla da própria função, ou seja,

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} E_\alpha(t^\alpha) = E_\alpha(t^\alpha). \tag{2}$$

Isto nos mostra que a função exponencial não é apenas um caso particular da FML e sim mais que isso, i.e., a FML é uma generalização dela, mantendo a principal propriedade no cálculo. Além disso, ao resolvermos uma equação diferencial fracionária com coeficientes constantes teremos, assim como no cálculo usual, as soluções dadas em função da exponencial, no caso, as funções de Mittag-Leffler.

Portanto, fica claro entender a rainha das funções especiais, a função de Mittag-Leffler, como uma generalização da exponencial, bem como sua importância para o cálculo fracionário, devido a sua propriedade principal de derivada, e, como consequência, para EDs com coeficientes constantes. Mas, além disso, estes fatos evidenciam o cálculo de ordem não inteira, o CF, como uma generalização do cálculo usual.

No trabalho que será apresentado no CNMAC, mostraremos, além do resumido aqui, algumas relações e gráficos da Função de Mittag-Leffler.

Agradecimentos

Agradeçemos à FAPESP (processo 2018/13948-6) por financiar o projeto deste trabalho.

Referências

[1] R. F. Camargo e E. C. Oliveira. *Cálculo Fracionário*. Editora Livraria da Física, São Paulo, 2015.

[2] F. Mainardi and R. Gorenflo. Time-fractional derivatives in relaxation processes: a tutorial survey. *Fract. Calc. Appl. Anal.*, v. 10, p. 269-308, 2007.

[3] D. S. Oliveira. Derivada fracionária e as funções de Mittag-Leffler, Dissertação de Mestrado em Matemática Aplicada, Unicamp, 2014.

