Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 7, n. 1, 2020.

Trabalho apresentado no XXXIX CNMAC, Uberlândia - MG, 2019.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Representação spinorial de variedades SpinC em formas espaciais

Samuel Augusto Wainer [1]
Instituto Tecnológico de Aeronáutica
Rafael de Freitas Leão [2]
Insitituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Resumo. Dois tópicos de pesquisa bem conhecidos no século XX, na área de geometria diferencial, são a equação de Dirac e imersões minimais de superfícies. Em 1998, Thomas Friedrich, elucidou a relação entre imersões isométricas de superfícies com uma dada curvatura média e soluções da equação de Dirac. Na literatura, outros autores abordaram o problema da relação entre soluções da equação de Dirac e imersões isométricas para outras variedades *Spin* em espaços de dimensões maiores. Aqui enunciamos a caracterização spinorial de imersões isométricas de variedades que possuem uma estrutura $Spin^{\mathbb{C}}$ de dimensão arbitrária em formas espaciais.

Palavras-chave. Álgebra de Clifford, Spinores, Imersões.

1 Spinores e imersões

Em 1998, Thomas Friedrich [4], utilizando o formalismo do fibrado de Clifford, elucidou a relação entre imersões isométricas de superfícies com uma dada curvatura média H e soluções da equação de Dirac.

A ideia principal de Friedrich, que leva à descrição de uma superfície M^2 por um campo spinorial, é a observação de que a restrição para M^2 de qualquer campo spinorial paralelo ψ em $\mathbb{R}^3$ é um campo spinorial não-trivial φ em M^2 de norma constante que é uma solução da equação de Dirac

$$D\varphi = H\varphi.$$

Por outro lado, qualquer solução φ da equação $D\varphi = H\varphi$ de norma constante define um endomorfismo simétrico $E : T(M^2) \to T(M^2)$ tal que o campo do spinor satisfaz uma equação tipo Killing

$$\nabla_X\varphi = E(X) \cdot \varphi.$$

[1]wainer@ita.br
[2]leao@ime.unicamp.br.

DOI: 10.5540/03.2020.007.01.0429

As condições de integrabilidade resultantes para o endomorfismo E são exatamente as equações de Gauss e Codazzi, isto é, uma solução φ da equação de Dirac produz uma imersão isométrica de M^2 em $\mathbb{R}^3$.

Especificamente, o teorema provado por Friedrich em [4] é

Teorema 1.1. *Seja (M^2, g) uma variedade Riemanniana 2-dimensional orientada e $H : M^2 \to \mathbb{R}$ uma aplicação suave. Então são equivalentes as seguintes afirmações:*

(a) *Existe uma imersão isométrica $(\tilde{M}^2, g) \to \mathbb{R}^3$ do recobrimento universal de M^2 $(\tilde{M}^2)$ em $\mathbb{R}^3$ com curvatura média H.*

(b) *Existe uma solução φ, de norma constante $|\varphi| = 1$, da equação de Dirac $D\varphi = H\varphi$.*

(c) *Existe um par (φ, E) consistindo de um endomorfismo simé trico E tal que $tr(E) = -H$ e um campo spinorial φ tal que $\nabla_X^{M^2}\varphi = E(X) \cdot \varphi$.*

Na literatura, outros autores abordaram o problema da relação entre soluções da equação de Dirac e imersões isométricas para outras variedades em espaços de dimensões maiores:

1. Em 2004, Bertrand Morel, [9] estendeu a representação spinorial de imersões isométricas em $\mathbb{R}^3$ 3 para S^3 e H^3. Seu argumento, bem como Friedrich, consiste em considerar spinores especiais em S^3 e H^3 e suas restrições às superfícies imersas.

2. Em 2008 Marie-Amelie Lawn [5] mostrou como uma dada superfície de Lorentziana (M^2, g) pode ser imerso no espaço pseudo-riemanniano $\mathbb{R}^{2,1}$.

3. Em 2010 Lawn e Julien Roth [6] forneceu uma caracterização spinorial de superfícies imersas isometricamente em formas espaciais 4-dimensional e espaços de produto $\mathbb{M}^3 \times \mathbb{R}$ ($\mathbb{M}^3 \simeq (\mathbb{R}^3, \mathbb{S}^3, \mathbb{H}^3)$.

4. Lawn e Roth [7] em 2011, deram um caracterização spinorial de superfícies imersas isometricamente de assinatura arbitrária em formas espaciais pseudo-riemannianas tridimensionais. Isso generaliza o trabalho de Lawn em $\mathbb{R}^{2,1}$ a outras formas espaciais de Loretzianas.

5. Em 2013 Bayard [1] provou que uma imersão de uma superfície Riemanniana M^2 no espaço de Minkowski quadridimensional $\mathbb{R}^{1,3}$, com um fibrado normal dado E e dado um vetor de curvatura média $\vec{H} \in \Gamma(E)$, é equivalente a um campo spinorial normalizado $\varphi \in \Gamma(\Sigma E \otimes \Sigma M)$ solução de uma equação de Dirac $D\varphi = \vec{H} \cdot \varphi$ na superfície.

6. Recentemente, no ano de 2017, Bayard, Lawn e Roth [2] estudaram a representação spinorial de subvariedades de qualquer dimensão e qualquer codimensão em formas espaciais em termos da existência de spinores de Killing generalizados. A ideia dos autores deste artigo, que inspirou nosso trabalho, é considerar a representação na álgebra de Clifford Cl_n dada pela multiplicação da esquerda. Essa representação não é irredutível, mas tem vantagens algébricas muito interessantes.

7. E, finalmente em 2017 Bayard, Roth e Jimenez [3] apresentaram essa caracterização spinorial de subvariedades, de qualquer dimensão e codimensão, em grupos de Lie equipados com uma métrica invariante à esquerda.

2 Representação Spinorial de variedades SpinC em formas espaciais

Todos esses resultados, se restringem a supor que os objetos em questão admitem uma estrutura *Spin*. Seguindo a ideia destes resultados recentes e utilizando um fibrado $Spin^{\mathbb{C}}$-Clifford particular, nós apresentamos em [8] a representação spinorial de subvariedades $Spin^{\mathbb{C}}$ de qualquer dimensão e codimensão em $\mathbb{R}^n$, estendendo-a para uma classe maior de variedades, como por exemplo variedades quase-complexas que admitem uma estrutura $Spin^{\mathbb{C}}$ canônica.

Precisamente foi mostrado o seguinte teorema:

Teorema 2.1. *Seja M uma variedade Riemanniana p-dimensional, $E \to M$ um fibrado vetorial sobre $\mathbb{R}$ de posto q, assuma que TM e E são orientadas e $Spin^{\mathbb{C}}$ $(n = p + q)$. Suponha que $B : TM \times TM \to N$ é uma aplicação simétrica e bilinear. A é a conexão no fibrado S^1-principal. Assim as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *Existe um campo spinorial φ tal que*

$$\nabla_X \varphi = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} e_i \cdot B(X, e_i) \cdot \varphi + \frac{1}{2} i\ A(X) \cdot \varphi, \quad \forall X \in TM.$$

2. *Existe uma imersão isométrica $F : M \to \mathbb{R}^n$ com fibrado normal E e segunda forma fundamental B.*

Além disso, a 1-forma definida pelo produto interno

$$\xi(X) := \langle\langle X \cdot \varphi, \varphi\rangle\rangle\,, \quad \forall X \in TM.$$

é $\mathbb{R}^n$-valorada, fechada e $dF = \xi$.

Para o caso da representação spinorial de variedades $Spin^{\mathbb{C}}$ nos espaços de curvatura constante apresentamos as seguintes:

Teorema 2.2. *Seja M uma variedade p-dimensional, $E \to M$ um fibrado vetorial de posto q, assuma que TM e E são orientados e $Spin^{\mathbb{C}}$ $(n = p+q)$. Suponha que $B : TM \times TM \to N$ é uma aplicação simétrica e bilinear. A é a conexão no fibrado S^1-principal, ν é o vetor normal de $\mathbb{S}^n$ em $\mathbb{R}^{n+1}$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *Existe um campo spinorial φ tal que*

$$\nabla_X \varphi = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p} e_i \cdot B(X, e_i) \cdot \varphi + \frac{1}{2} X \cdot \nu \cdot \varphi + \frac{1}{2}\mathbf{i} A(X) \cdot \varphi, \quad \forall X \in TM.$$

2. *Existe uma imersão isométrica $F : M \to \mathbb{S}^n$ com fibrado normal E e segunda forma fundamental B.*

Além disso, $F = \langle\langle \nu \cdot \varphi, \varphi \rangle\rangle \in \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Teorema 2.3. *Seja M uma variedade p-dimensional, $E \to M$ um fibrado vetorial de posto q, assuma que TM e E são orientados e $Spin^{\mathbb{C}}$ $(n = p+q)$. Suponha que $B : TM \times TM \to N$ é uma aplicação simétrica e bilinear. A é a conexão no fibrado S^1-principal, ν é o vetor normal de $\mathbb{H}^n$ em $\mathbb{R}^{n,1}$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *Existe um campo spinorial φ tal que*

$$\nabla_X \varphi = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p} e_i \cdot B(X, e_i) \cdot \varphi - \frac{1}{2} X \cdot \nu \cdot \varphi + \frac{1}{2}\mathbf{i}A(X) \cdot \varphi, \quad \forall X \in TM.$$

2. *Existe uma imersão isométrica $F : M \to \mathbb{H}^n$ com fibrado normal E e segunda forma fundamental B.*

Além disso, $F = \langle\langle \nu \cdot \varphi, \varphi \rangle\rangle \in \mathbb{H}^n \subset \mathbb{R}^{n,1}$.

3 Conclusões

É natural nos perguntarmos se a formulação apresentada em [2] pode ser adaptada para o caso de variedades $Spin^{\mathbb{C}}$, por exemplo, no contexto de variedades quase-complexas a estrutura canônica que aparece é a estrutura $Spin^{\mathbb{C}}$. Seguindo essa direção, os teoremas 2.1, 2.2 e 2.3 apresentam a representação spinorial de variedades $Spin^{\mathbb{C}}$ em formas espaciais.

Referências

[1] P. Bayard, M. A. Lawn, J. Roth, *Spinorial representation of surfaces in four-dimensional Space Forms*, Annals of Global Analysis and Geometry, **44**, pp. 433-453, 2013.

[2] P. Bayard, M. A. Lawn, J. Roth, *Spinorial representation of submanifolds in Riemannian space forms*, Pacific Journal of Mathematics, **291-1**, pp. 51-80, 2017.

[3] P. Bayard, J. Roth, B. Z. Jimenez, *Spinorial representation of submanifolds in metric Lie groups*, Journal of Geometry and Physics **114**, pp. 348-374, 2017.

[4] T. Friedrich, *On the Spinor Representation of Surfaces in Euclidean* 3-space, Jour. of Geom. and Phys. **28**, pp. 143-157, 1998.

[5] M. A. Lawn, *Immersions of Lorentzian surfaces in* $\mathbb{R}^{2,1}$, Jour. of Geom. and Phys **58**, pp. 683–700, 2008.

[6] M. A. Lawn, J. Roth, *Isometric immersions of hypersurfaces in 4-dimensional manifolds via spinors*, Differential Geometry and its Applications, **28**, pp. 205-219, 2010.

[7] M. A. Lawn, J. Roth, *Spinorial Characterizations of Surfaces into 3-dimensional Pseudo-Riemannian Space Forms*, Math. Physics, Analysis and Geometry, **14**, pp. 185-195, 2011.

[8] R. F. Leão, S. A. Wainer, *Immersion in* $\mathbb{R}^n$ *by complex spinors*, Adv. Appl. Clifford Algebras (2018) 28: 44.

[9] B. Morel, *Surfaces in* S^3 and H^3 via spinors, Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Grenoble), **23**, pp. 131-144, 2004-2005.

DOI: 10.5540/03.2020.007.01.0429