Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 7, n. 1, 2020.

Trabalho apresentado no XXXIX CNMAC, Uberlândia - MG, 2019.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Uma introdução aos reticulados algébricos

Livea Cichito Esteves [1]
Departamento de Matemática, Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas (Ibilce), Câmpus São José do Rio Preto - SP
Antonio Aparecido de Andrade [2]
Departamento de Matemática, Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas (Ibilce), Câmpus São José do Rio Preto - SP

1 Introdução

Neste trabalho iremos apresentar algumas definições importantes sobre a teoria dos reticulados junto com uma importante aplicação: o problema de empacotamento. Além disso, exporemos o famoso problema do kissing number, relacionando-o com o problema de empacotamento.

O problema kissing number consiste em determinar o número máximo de esferas de mesmo raio não sobrepostas que se intersectam em no máximo um ponto, ao redor de uma outra esfera fixa no espaço. Em $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2$ o problema é fácil de resolver (na reta, esse valor é 2, e no plano, 6) mas em dimensões maiores torna-se um problema mais complexo, tanto que o valor do kissing number em $\mathbb{R}^3$ foi objeto de uma famosa discussão entre Isaac Newton e David Gregori, em 1694. Newton achava que a resposta era 12, enquanto Gregori acreditava ser 13. Algumas provas apareceram no século 19 provando que Newton estava correto. Schütte e Waerden deram uma prova detalhada em 1953 mas a melhor prova até agora obtida é a de Leech. As dificuldades aparecem porque o arranjo destas bolas não é único, ou seja, existem infinitas maneiras para distribuir 12 bolas ao redor de outra. Por exemplo, se as 12 forem colocadas em posição correspondente aos vértices de um icosaedro concêntrico com a bola central, as 12 bolas externas não tocam cada outra e podem ser movidas livremente, fazendo parecer que havia espaço para uma outra bola.

O problema do empacotamento em $\mathbb{R}^n$, possui uma ideia similar: consiste em obter uma distribuição de esferas de mesmo raio em $\mathbb{R}^n$ que cubra a maior área possível, de forma que a interseção entre duas esferas tenha no máximo um ponto. Quando os centros dessas esferas formam um reticulado, dizemos que o empacotamento é reticulado. Neste tipo, o kissing number τ é o mesmo para todas as esferas, pois estarão dispostas de maneira regular, agora, em um empacotamento arbitrário, τ pode variar entre uma esfera e outra.

Vejamos a seguir algumas definições importantes e como podemos relacionar esses dois problemas.

[1]liveacichito@gmail.com
[2]antonio.andrade@unesp.br

2 Reticulados e Empacotamento Esférico

Definição 2.1. *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita n sobre um corpo $\mathbb{K}$, $A \subseteq \mathbb{K}$ um anel e $v_1, \cdots, v_m$ vetores de V linearmente independentes sobre $\mathbb{K}$ com $m \leq n$. Chama-se* ***reticulado*** *com base $\beta = \{v_1, \cdots, v_m\}$ ao conjunto dos elementos de V da forma $\left\{x = \sum_{i=1}^{m} a_i v_i, \quad \text{com } a_i \in A\right\}$, que será denotado por $\mathcal{H}_\beta$. O conjunto $\mathcal{P}_\beta = \left\{x \in \mathbb{R}^n : x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i,\, 0 \leq \lambda_i < 1\right\}$, é chamado de* ***região fundamental*** *de $\mathcal{H}_\beta$ com relação à base $\{v_1, \cdots, v_n\}$.*

Definição 2.2. *Sejam $\mathcal{H} \subseteq \mathbb{R}^n$ um reticulado, $v = \{v_1, \cdots, v_n\}$ uma base de $\mathcal{H}$ e $\mathcal{P}_v$ a região fundamental. Se $v_i = (v_{i1}, v_{i2}, \cdots, v_{in})$, para $i = 1, 2, \cdots, n$, definimos o volume da região fundamental $\mathcal{P}_v$, como o módulo do determinante da matriz $B = (v_{i,j})_{i,j=1}^{n}$. O volume do reticulado $\mathcal{H}$ é definido como $\mathcal{V}ol(\mathcal{H}_\beta) = \mathcal{V}ol(\mathcal{P}_v)$.*

Dado um empacotamento no $\mathbb{R}^n$, associado a um reticulado $\mathcal{H}_\beta$, com $\beta = \{v_1, \cdots, v_n\}$ uma $\mathbb{Z}$-base, definimos a sua **densidade de empacotamento** como sendo a proporção do espaço $\mathbb{R}^n$ coberta pela união das esferas. Denotando por $\mathcal{B}(\rho)$ a esfera com centro na origem e raio ρ, temos que a **densidade de empacotamento** de $\mathcal{H}_\beta$ é igual a $\Delta(\mathcal{H}_\beta) = \dfrac{\text{Volume da região coberta pelas esferas}}{\text{Volume da região fundamental}} = \dfrac{\mathcal{V}ol(\mathcal{B}(\rho))}{\mathcal{V}ol(\mathcal{H}_\beta)} = \dfrac{\mathcal{V}ol(\mathcal{B}(1))\rho^n}{\mathcal{V}ol(\mathcal{H}_\beta)}$. Portanto, o problema se reduz ao estudo de um outro parâmetro, chamado de **densidade de centro**, que é dado por $\delta(\mathcal{H}_\beta) = \dfrac{\rho^n}{\mathcal{V}ol(\mathcal{H}_\beta)}$. Logo, tiramos a seguinte relação $\Delta(\mathcal{H}_\beta) = \mathcal{V}ol(\mathcal{B}(1)).\delta(\mathcal{H}_\beta)$, ou seja, a densidade de empacotamente de $\mathcal{H}_\beta$ é igual ao produto entre o volume da esfera com centro na origem e raio 1 e a densidade de centro de $\mathcal{H}_\beta$.

Os problemas de interesse, normalmente, consistem em determinar o reticulado que possibilita um melhor empacotamento, isto é, que possuem maior densidade, e também um maior kissing number, pois o kissing number de uma esfera do reticulado também é um critério para classificar o empacotamento. Assim, o reticulado que nos dá o kissing number é o mesmo que nos dá o melhor empacotamento.

Agradecimentos

À CAPES pelo apoio financeiro.

Referências

[1] I. Stewart, and D. Tal. *Algebraic Number Theory*, Chapman & Hall, New York, 1987.

[2] P. Samuel. *Algebraic theory of numbers*, Hermann, Paris, 1967.

[3] C. Alves, Reticulados via corpos ciclotômicos, Dissertação de Mestrado, Ibilce - Unesp, São José do Rio Preto, 2005.

