

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

---

## Representação linear de sinais caóticos gerados por mapas lineares por partes

Rafael Alves da Costa e Marcio Eisencraft<sup>1</sup>

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, SP

### 1 Introdução

Sistemas dinâmicos de tempo discreto que geram sinais caóticos têm sido considerados em muitas aplicações práticas, como por exemplo, sistemas de comunicação baseado em caos [4]. Assim, conhecer as características de tempo e frequência dos sinais gerados por esses sistemas e formas eficientes para sua implementação tornam-se primordiais [1, 2].

Nessa linha, Drake e Willians [3] consideraram o mapa

$$s(n+1) = rs(n) \pmod{1} \quad (1)$$

sendo que  $r > 1$  é um inteiro positivo, o operador  $y \pmod{1}$  retorna a parte fracionária de  $y$  e  $s(0) \in [0, 1]$ . Eles mostraram que é possível obter órbitas geradas por esse mapa utilizando um filtro linear anticausal com uma entrada projetada adequadamente.

No presente trabalho, estendem-se os resultados para  $r$  inteiro não nulo com  $|r| \geq 2$ . Além disso, mostra-se que utilizar a representação linear simplifica o cálculo da densidade espectral de potência dos sinais caóticos gerados.

### 2 Representação linear e resultados

Considere-se o filtro linear

$$\begin{cases} s_\ell(n) = \frac{1}{r} [s_\ell(n-1) + v(n)] \\ s_\ell(-1) = 0 \end{cases}, \quad (2)$$

em que  $v(n)$  é a entrada.

Na versão completa desse artigo, mostra-se que se  $v(n)$  é a sequência dos dígitos na expansão  $|r|$ -ária de  $s(0)$ , então pode-se utilizar (2) para gerar a correspondente órbita de (1) de modo que  $\epsilon(n) = |s_\ell(N-1-n) - s(n)| < |r|^{n-(N-1)} = L(n)$  para  $0 \leq n \leq N-1$  e  $r$  inteiro com  $|r| \geq 2$ .

---

<sup>1</sup>rcosta@lcs.poli.usp.br,marcio@lcs.poli.usp.br

Na Figura 1(a) exemplifica-se o mapa  $f(\cdot)$  com  $r = -3$ . Na Figura 1(b) mostram-se  $s(n)$  e  $s_\ell(N - 1 - n)$  para  $s(0) = 1/\pi$  e  $N = 100$ . Por fim, na Figura 1(c) têm-se o gráfico de  $L(n)$  e  $\epsilon(n)$ . Nota-se que, de fato,  $\epsilon(n) < L(n)$  para  $\epsilon(n) > 10^{-16}$ , em que  $10^{-16}$  é a precisão numérica do programa de simulação utilizado.

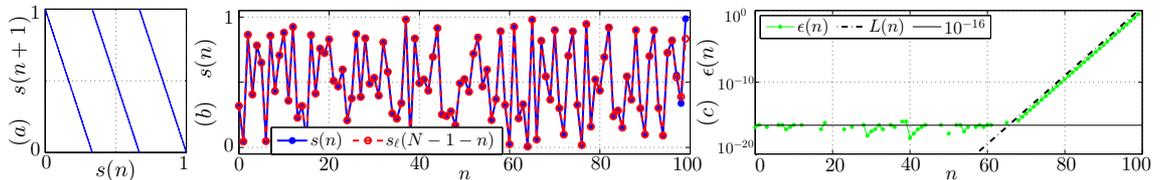


Figura 1: (a) Exemplo de mapa  $f(\cdot)$  com  $r = -3$ , (b) órbitas com igual condição inicial geradas por (1) e por (2) e (c) o gráfico de  $\epsilon(n)$  e  $L(n)$ .

A densidade espectral de potência (DEP) das órbitas do mapa (1) pode ser obtida a partir da função de transferência de (2) e da DEP de  $v(n)$ . Assim, utilizando da teoria de sistemas lineares pode-se mostrar que [5]

$$S(\omega) = \frac{r^2 - 1}{3(1 + r^2 - 2r \cos(\omega))}. \quad (3)$$

Essa equação concorda com o resultado mais geral obtido em [1].

Como continuação desse trabalho pretende-se estender esse estudo para mapas lineares por partes mais gerais.

## Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001. M.E. foi parcialmente financiado por CNPq 309275/2016-4.

## Referências

- [1] R. A. Costa, M. B. Loiola, and M. Eisenkraft. Correlation and spectral properties of chaotic signals generated by a piecewise-linear map with multiple segments. *Signal Processing*, 133:187–191, apr 2017.
- [2] R. A. da Costa and M. Eisenkraft. Spectral characteristics of a general piecewise linear chaotic signal generator. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 72:441–448, 2019.
- [3] D. F. Drake and D. B. Williams. Linear, random representations of chaos. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 55(4):1379–1389, apr 2007.
- [4] G. Kaddoum. Wireless chaos-based communication systems: A comprehensive survey. *IEEE Access*, 4:2621–2648, 2016.
- [5] A. V. Oppenheim, A. S. Willsky, and S. H. Nawab. *Signals & systems (2nd ed.)*. Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, USA, 1996.