

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Análise Numérica de Estabilidade de Estruturas Sujeitas a Condições de Fronteira Não Linear

Marcos Rabelo ¹

Programa de Pós-Graduação em Ciências Exatas e Tecnológicas, Universidade Federal de Goiás, Campus Catalão.

Flávia Gonçalves ²

Programa de Pós-Graduação em Ciências Exatas e Tecnológicas, Universidade Federal de Goiás, Campus Catalão.

Luiz Fernando Martinez³

Programa de Pós-Graduação em Ciência e Tecnologia, Universidade Federal de Goiás, Campus Catalão

Marcus Felipe⁴

Programa de Pós-Graduação em Modelagem e Otimização, Universidade Federal de Goiás, Campus Catalão

Romes Antônio Borges⁵

Programa de Pós-Graduação em Modelagem e Otimização, Universidade Federal de Goiás, Campus Catalão

Resumo. Na teoria de micro-estruturas, as equações de movimento possuem seus fundamentos na relação tensão/deformação. O campo de deformações é descrito pela curvatura, um conceito geométrico que, para ser calculada, utiliza a derivada segunda do campo de deslocamento numa relação não linear. Assumindo pequenos deslocamentos no ângulo de deflexão, a relação momento/curvatura pode ser descrita por meio da derivada de segunda ordem do campo de deslocamentos. Este modelo permite a análise dos termos de forças de cisalhamento e momento que estão presentes na teoria. Assim usando o princípio variacional, as equações de movimento são obtidas, permitindo a análise dinâmica da estrutura. Do ponto de vista de projetos, o controle de vibrações em micro-estruturas exerce um papel fundamental. Neste trabalho será analisado uma barra do tipo Euler-Bernoulli com condições de contorno do tipo engaste-livre levando em consideração as não linearidades na fronteira. Por ser um fenômeno predominantemente oscilatório, pretende-se estudar o controle de vibrações, visando à estabilidade do sistema por meio do deslocamento da estrutura nas condições de contorno. Mostraremos que o projeto de controle introduz condições de contorno não linear na formulação das equações de movimento da estrutura. O método de elementos finitos é empregado para discretizar as equações de movimento na parte de deformação e o método das diferenças centradas é utilizado para integrar a dinâmica do sistema.

¹rabelomn@gmail.com.

²flavia.fernandes92@gmail.com.

³luizfernandoelias@gmail.com.

⁴marcusmarfel@hotmail.com

⁵romesufg@gmail.com

Palavras-chave. Método de Galerkin, Micro-estruturas não clássicas, Atuação eletroestática não linear, Análise de vibrações, Métodos numéricos.

1 Introdução

Estruturas microeletromecânicas desempenham um papel importante em projetos de engenharia. São máquinas em escalas de nanômetros que possuem componentes eletrônicos e mecânicos. Como exemplo de aplicações, podemos citar microscópios eletrônicos usados na inspeção de superfícies de materiais, [1]. O princípio de tais mecanismos se baseia na perturbação de campos magnéticos, produzida pela deformação de materiais inteligentes presentes na estrutura; tais perturbações de sinais são interpretadas na forma de informações processadas pelo sistema. Devido a simplicidade de seus componentes e ao baixo custo de fabricação, aliado a uma gama enorme de aplicações, os microsistemas tem atraído cada vez mais atenção, tanto do setor industrial, devido as suas enormes potencialidades em aplicações em sistemas automotivos, controle em manufatura, manejo sustentável e controle de contaminantes em sistemas hidrológicos; melhoramento de performance e confiabilidade de sistemas; instrumentação médica, quanto do meio acadêmico, por se tratar de um campo relativamente novo.

Neste trabalho um componente micromecânico é modelado por meio de uma viga do tipo Euler-Bernoulli. Para melhor descrever a dinâmica do sistema, um termo de terceira ordem, conhecido na literatura como tensor deformação gradiente, veja [2], será considerado no modelo, além da aproximação para o tensor curvatura, veja [5]. Segue do princípio variacional que, o momento fletor fornece um termo de quarta ordem, enquanto o tensor de deformação gradiente, fornece um termo de sexta ordem na equação que descreve a dinâmica do sistema, veja (7).

A força eletrostática atuante no sistema é um campo de força pontual localizado na extremidade livre da barra. Neste trabalho, tal carregamento será considerado nas condições de contorno. Por descrever uma relação não linear com o campo de deslocamento, pretende-se analisar a dinâmica do sistema por meio da técnica de elementos finitos não lineares, juntamente com técnicas de controle na fronteira, com o intuito de atenuar a amplitude de oscilação do deslocamento vertical da estrutura.

2 Modelo Não Linear de Estruturas

Nesta seção faremos o desenvolvimento da modelagem matemática necessária para a análise de esforços na estrutura. A estrutura é uma barra de comprimento $L(\mu m)$ com área da seção transversal $A = bh$, $b(\mu m)$ representa a largura e $h(\mu m)$ a espessura da barra. A densidade do material gira em torno de $1000 \frac{kg}{m^3}$; o módulo de elasticidade é da ordem de $E = 1.44GPa$, conforme pode ser visto na Figura 1.

No presente trabalho, para estudarmos as deformações da estrutura, a teoria de Euler-Bernoulli para barras será considerada. Seu uso pressupõem uma relação entre o comprimento e espessura de barra da ordem de 10; isto significa que $\frac{L}{h} > 10$. No presente modelo, a deformação ϵ_x , ao longo das fibras da estrutura, é dada por sua curvatura, cuja definição

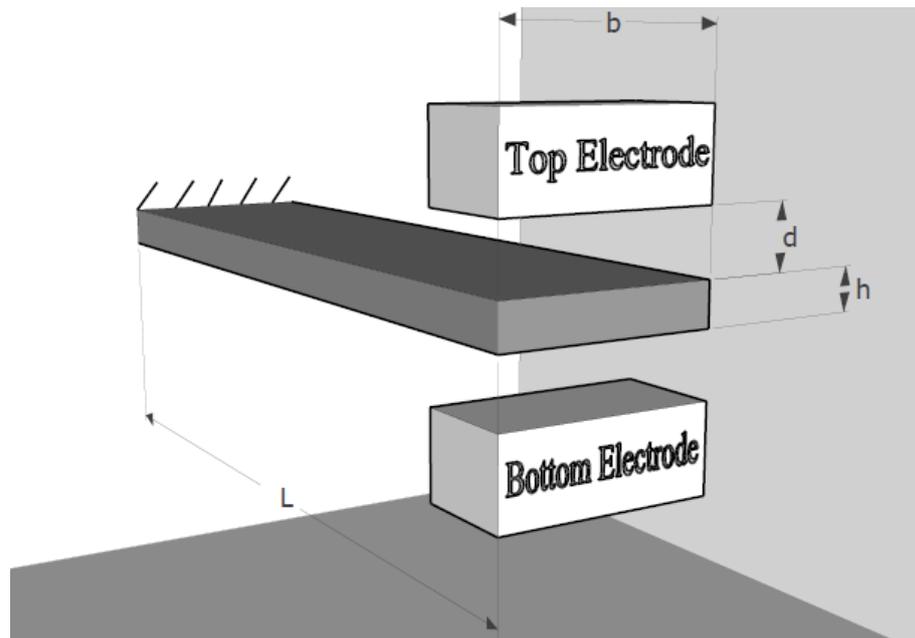


Figura 1: Modelo de Viga do Tipo Euler-Bernoulli

é

$$\epsilon_x = \frac{z - a}{R} \quad (1)$$

A tensão, σ_x que atuante nas fibras da estrutura ao longo da direção x é

$$\sigma_x = -\frac{E(z - a)}{R}, \quad (2)$$

onde z representa a linha de deformação da estrutura e a é a distância não deformada do eixo de referência à linha neutra da estrutura, veja Figura 1. O momento gerado no plano $y - z$ a partir do campo de tensões σ_x na direção x é dado por

$$M_{yz} = \frac{EI}{R}, \quad (3)$$

onde I_{yz} representa o momento de inércia do elemento de área dA_{yz} no plano $y - z$,

$$I_{yz} = \int \int_{dA_{yz}} (z - a)^2 dz dy, \quad (4)$$

e E representa o módulo de elasticidade da estrutura. Se o campo de deslocamento da estrutura, no plano x, z é dado, respectivamente por u e w , a curvatura no plano $x - z$ é dado por

$$\frac{1}{R} = \frac{(1 + \partial_x u) \partial_x^2 w - (\partial_x w) (\partial_x^2 u)^2}{[(1 + \partial_x u)^2 + \partial_x^2 w]^{\frac{3}{2}}}, \quad (5)$$

veja [2, 5] para maiores detalhes.

Neste trabalho consideraremos que a deformação por deslocamento axial é pequena, assim podemos assumir que a curvatura κ é aproximada por

$$\kappa = \frac{1}{R} = \partial_{xx}w.$$

De (1) a deformação axial é dada pela expressão

$$\epsilon_x = -(z - a)\partial_{xx}w.$$

A lei de Hooke expressão na relação (2) fornece

$$\sigma_x = -E(z - a)\partial_{xx}w.$$

Levando em consideração (3) juntamente com a teoria das estruturas, o momento M_{yz} e a força cortante são dados por

$$\begin{aligned} M_{yz}(x) &= EI(x)\partial_{xx}w, \\ V_y &= (EI(x)\partial_{xxx}w)_x. \end{aligned} \quad (6)$$

Neste trabalho a dinâmica da viga será feita por meio da hamiltoniana generalizada,

$$\begin{aligned} F(x, t, w, \dot{w}, w_x, w_{xx}, w_{xxx}) &= \frac{1}{2} \int_0^L \rho A(x)(\partial_t w)^2 dx \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^L EI(x)(\kappa_1(\partial_{xxx}w)^2 - \kappa_2(\partial_{xx}w)^2) dx, \\ &+ \frac{1}{2} \epsilon b V_0^2 \int_0^L F(w(x, t)) \delta(x - L) dx \end{aligned} \quad (7)$$

onde $\kappa_i, i = 1, 2$ são dadas por

$$\kappa_1 = \mu A \left(2l_0^2 + \frac{43}{225}l_1^2 + l_2^2 \right), \quad (8)$$

$$\kappa_2 = \mu I \left(2l_0^2 + \frac{4}{5}l_1^2 \right). \quad (9)$$

Nas equações (8)-(9) os termos l_0, l_1 e l_2 representam, respectivamente, a tensão gradiente por dilatação, tensão gradiente por tração e tensão gradiente por rotação, veja [4]. A partir deste funcional é deduzido as equações que descrevem o deslocamento transversal da estrutura, juntamente com as condições de fronteira. Para a montagem da hamiltoniana as energias de deformações internas expressas pelo momento fletor; a inércia distribuída da estrutura, geralmente o peso específico da estrutura exerce um papel preponderante; as concentrações de massa pontual; as energias elásticas, distribuídas e pontuais que estão em contato ao longo do interior da estrutura; os campos de temperatura e os campos elétricos a atuar na estrutura. Na fronteira da viga considera-se os efeitos devido a inércia, energia potencial elástica de contato e energia de deformação devido a presença de gradientes de temperatura.

3 Metodologia

A metodologia usada se baseia em recentes avanços na teoria de deformação de sólidos. Especificamente, a teoria de deformação gradiente é usada para descrever as equações de movimento da estrutura via formulação de Hamilton, veja [5]. A dinâmica do sistema é formada por equações diferenciais parciais de ordem 6 na variável espacial, conforme equação (7).

Para controle de oscilações, as forças internas, cisalhamento, momento e compressão são usadas como sinais de retroalimentação para estabilizar o deslocamento da estrutura.

Para resolver as equações de movimento, o método dos elementos finitos é empregado na parte de forças de deformações. Elementos unidimensionais e polinômios ortogonais de Hermite são usados para discretizar a estrutura. Foram considerados 16 nós e 15 elementos unidimensionais. Na parte da dinâmica, o método de diferenças centradas é utilizada para integrar as equações de movimento.

Diferentemente de trabalhos recentes na literatura, que considera como campo externo a força eletrostática atuadora no sistema, no presente trabalho a força de atuação foi considerada na condição de contorno. Dessa forma permite-se que o problema de análise de vibrações da estrutura seja modelado como um problema de vibrações livres sem amortecimento. Entretanto, diferentemente de sistemas ordinários, as simulações numéricas, mostram que sistemas contínuos podem apresentar elementos de estabilidade ou instabilidade mesmo quando sujeitos a oscilações livres.

Alguns, recentes resultados na literatura, tem mostrado que, quando o problema é modelado com condições de contorno do tipo Dirichlet ou Newman, o sistema apresenta comportamento oscilatório com presença de ruído, veja [1, 3, 8–11].

Conforme podemos ver pelo conjunto de simulações, para os valores dados acima temos diferentes comportamentos dinâmicos para os nós da estrutura. A região próxima ao engaste apresenta estabilidade enquanto que, enquanto que para uma região um pouco afastada da condição de contorno tem um comportamento caótico, veja Figura 2. Já para regiões da estrutura próxima a extremidade livre a dinâmica apresenta instabilidade, veja Figura 3.

4 Análise de Resultados

No presente trabalho de pesquisa foi analisada a estabilidade de uma viga de Euler-Bernoulli do tipo engaste-livre com condições de contorno não linear via controle na fronteira. Para estabilizar a dinâmica do sistema, projeto de controles com retroalimentação, baseado no deslocamento da estrutura, no contorno livre foram considerados. O deslocamento no contorno livre da estrutura permitiu que as forças de cisalhamento e momento fossem incorporadas no projeto de controle. Os seguintes parâmetros foram considerados: comprimento da barra $340\mu m$, módulo de elasticidade do material $1.44GPa$, largura $34\mu m$, espessura $17\mu m$ e densidade do material $1000kg/m^3$.

As simulações numéricas mostram que alguns nós apresentaram comportamento de estabilização, enquanto que outros de instabilidade.

As Figuras 2 e 3, apresentam comportamento em torno de alguns pontos da estrutura. Conforme pode ser visto a dinâmica nodal na Figura 2 apresenta comportamento instável. Já a dinâmica descrita em 3 apresenta, para uma determinada região da viga, comportamento dinâmico estável, enquanto para outra região da viga comportamento instável.

A estabilização em torno do engaste era esperado devido a condição de engaste na condição de contorno. Para os nós que apresentaram instabilidade na dinâmica, outras estratégias de controle devem ser levadas em consideração, como o acoplamento de massa e rigidez na estrutura.

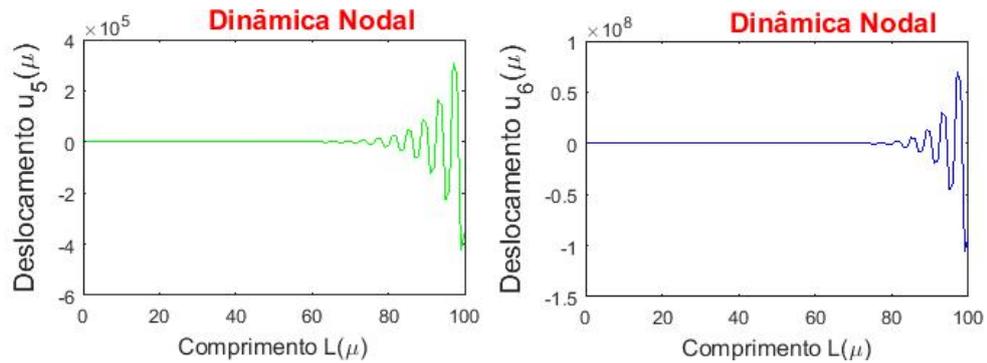


Figura 2: Dinâmica Nodal

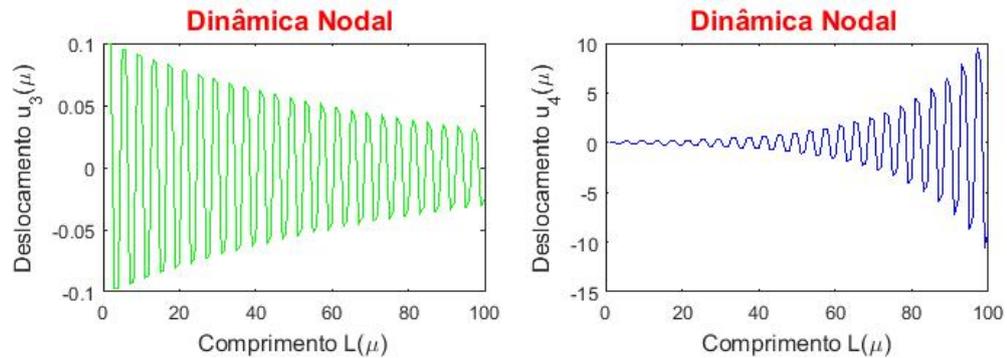


Figura 3: Dinâmica Nodal

Referências

- [1] M. T. Arjmand, H. Sadeghian, H. Salarieh, A. Alasty, Chaos control in AFM system using nonlinear delayed feedback via sliding mode control. *Nonlinear Anal. Hybrid Syst.* 2 (2007) 993-1001.

- [2] D. H. Hodges, Proper definition of curvature in nonlinear beam kinematics, *AIAA Journal*, 422 (12), (1984), 1825-1827.
- [3] M. M. Joglekar, D. N. Pawaskar, Estimation of oscillation period/switching time for electrostatically actuated microbeam type switches, *Int. J. Mech. Sci. Anal. Hybrid Syst.* 2 (2007) 993-1001.
- [4] D. C. C. Lam, F. Yang, A. C. M. Chong, A. C. M. Wang, P. Tong, Experiments and theory of strain gradient elasticity, *J. Mech. Phys. Solid*, 51 (2003), 1477-1508.
- [5] E. B. Magrab, *Vibration of Elastic Systems: With Applications to MEMS and NEMS*, Springer, 2012.
- [6] R. D. Mindlin, H. F. Tiersten, Effects of couple-stresses in linear elasticity, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 11 (1962) 415-445.
- [7] R. D. Mindlin, Second gradient of strain and surface tension in linear elasticity, *Int. J. Solids Struct.*, 1 (1965), 417-438.
- [8] Y. H. Qian, D. x. Ren, S. K. Lai, S. M. Chen, Analytical approximation to nonlinear vibration of an electrostatically actuated micro beam, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 17 (2012) 1947-1955.
- [9] R. Vatankhah, M. H. Kahrobaiyan, A. Alasty, M. T. Ahamadian, Nonlinear forced vibration of strain gradient microbeams, *Appl. Math. Modell.*, 37 (2013) 8363-8382.
- [10] J. Y. Yen, K. J. Lan, J. A. Kramar, Active vibration isolation of a large stroke scanning probe microscope by using discrete sliding mode control, *Sens. Actuators A*. 121 (2005) 243-250.
- [11] W. Zhang, G. Meng, H. Li, Adaptive vibration control of micro-cantilever beam with piezoelectric actuator in MEMS, *Int. J. Adv. Manuf. Technol.* 28 (2006) 321-327.