

## Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

---

# A Reputação Como Mecanismo de Promoção da Cooperação

Moiseis S. Cecconello <sup>1</sup>

Departamento de Matemática - UFMT

Jeremias Dourado <sup>2</sup>

Universidade Federal de Uberlândia - UFU

**Resumo.** Neste trabalho, propomos dois modelos probabilísticos para analisar a evolução de características fenotípicas dos indivíduos em uma população. No primeiro modelo, a característica fenotípica é a probabilidade de cada indivíduo cooperar no jogo Dilema do Prisioneiro. No segundo, o fenótipo de interesse é o peso dado para a reputação do oponente na interação entre indivíduos também por meio do Dilema do Prisioneiro. Em ambos modelos, fenótipos distintos conferem diferentes valores adaptativos e assim usamos o processo de seleção natural de Darwin para determinar a evolução dos fenótipos na população. Mais especificamente, estamos interessados em mostrar o surgimento da cooperação em populações em que os indivíduos levam em consideração o histórico, ou a reputação, dos oponentes nas interações. **Palavras-chave.** Jogos evolutivos, Dilema do Prisioneiro, Cooperação, Reputação.

## 1 Introdução

O princípio da seleção natural conforme desenhado por Darwin é um dos principais mecanismos de evolução das espécies e está pautada em três axiomas: 1 – a *variação fenotípica*, isto é, diferentes indivíduos tem diferentes características morfológica, fisiológica e comportamental; 2 – o *valor de adaptação* que atribui diferentes taxas de reprodução e sobrevivência para fenótipos diferentes e; 3 – a *hereditariedade*, ou seja, existem uma correlação entre os fenótipos de genitores e descendentes ([4]).

Conforme amplamente discutido por Darwin em [2], a luta pela sobrevivência leva os indivíduos de uma população a estarem em constante interação. Por exemplo, tais indivíduos interagem na disputa por recursos naturais como espaço e alimento, fuga de predadores bem como na busca de parceiros para o acasalamento e reprodução. Assim, a forma como um determinado indivíduo se comporta nestas interações com os demais da população pode influenciar o seu sucesso reprodutivo. Admitindo que o comportamento adotado por tais indivíduos é hereditário, essas interações estão então sujeitas ao processo seleção natural.

As interações entre os indivíduos pode ser modelada através da teoria dos jogos evolutivos ([3]). Os jogos evolutivos tem desempenhado um papel importante na busca por

---

<sup>1</sup>moiseis@gmail.com.

<sup>2</sup>jeremiasdourado@gmail.com

explicações de como pode ter evoluído o comportamento de cooperação e altruísmo entre indivíduos, de uma mesma espécie ou mesmo de espécies diferentes, observados na natureza. O Dilema do Prisioneiro é um dos jogos mais explorados dentro da teoria dos jogos evolutivos. Esse jogo tem sido empregado em situações onde a cooperação mútua aumenta o valor de adaptação dos envolvidos. Em contrapartida, cada indivíduo é incentivado a desertar da cooperação obtendo um valor ainda maior de adaptação por explorar o esforço alheio. O estudo da evolução da cooperação é um tópico ainda em desenvolvimento e uma síntese dos principais mecanismos que promovem a cooperação pode ser encontrado em [1].

Neste trabalho, propomos um modelo para explicar como cooperação e o altruísmo podem evoluir, por meio do mecanismo de seleção natural de Darwin, em uma população cujos indivíduos levam em conta o histórico do oponente em interações com os demais indivíduos da população para decidir a estratégia a ser usada em um jogo de Dilema do Prisioneiro.

## 2 A teoria dos jogos e o Dilema do Prisioneiro

Na perspectiva da teoria dos jogos evolutivos, indivíduos possuem estratégias fixas e interagem aleatoriamente com os demais indivíduos da população. Nesta teoria, o retorno (*payoff*) de uma estratégia específica é interpretado como o *valor adaptativo*, medido em termos da taxa de reprodução, de modo que tais estratégias estão sujeita à seleção darwiniana. O objeto de interesse desta teoria é determinar se o processo de seleção natural pode conduzir a população para uma estratégia ótima adotada pelos indivíduos ou um estado de equilíbrio ([5]).

O Dilema do Prisioneiro é um dos jogos evolutivos mais explorados na tentativa de buscar uma solução que explique a evolução do comportamento de cooperação. Considere a interação entre dois indivíduos que podem *cooperar* ( $C$ ) e *desertar* ( $D$ ) da cooperação. A matriz de retornos, ou valor adaptativo, para o caso do dilema do prisioneiro é dada por

$$\begin{array}{c} C \quad D \\ C \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}. \end{array} \quad (1)$$

Os modelos clássicos da teoria dos jogos evolutivos consistem em analisar a dinâmica populacional dos indivíduos adotando as estratégias  $C$  ou  $D$ , procurando a existência de pontos de equilíbrio assintoticamente estáveis. Para indivíduos interagindo pelo Dilema do Prisioneiro, é possível mostrar que o único ponto assintoticamente estável e aquele em que a população adota a estratégia  $D$  ([4]).

## 3 A interação de indivíduos de uma mesma espécie

Nesta seção vamos propor dois modelos para indivíduos interagindo por meio do Dilema dos Prisioneiros. No primeiro modelo, vamos considerar apenas o caso em que cada

indivíduo possui uma probabilidade de cooperar em cada interação. No segundo, vamos considerar o caso em que cada indivíduo usa o histórico de interações do oponente para definir a sua probabilidade de cooperação.

### 3.1 A cooperação não é um equilíbrio evolutivo

Em uma população com  $N$  indivíduos, cada indivíduo  $i$  é definido por um par  $I_i = (p_i, s_i)$  em que  $p_i$  representa a probabilidade de cooperação do indivíduo em uma interação e  $s_i$  é a soma dos valores adaptativos obtidos em cada interação entre indivíduos. A interação entre os indivíduos ocorre de maneira aleatória, provocando alterações nos valores  $s$  dos oponentes. Como podemos facilmente verificar, o valor adaptativo para a estratégia adota pelo indivíduo  $i$  depende da probabilidade  $p_i$  de modo que, assumindo que essa probabilidade é uma característica hereditária, podemos utilizar o processo de seleção de Darwin para estudar a evolução das estratégias ao longo as gerações.

Assim, o modelo de evolução consiste em gerar uma população  $\mathcal{P}$  com  $N$  indivíduos obedecendo uma distribuição de probabilidade  $d$  sobre o intervalo  $[0, 1]$ , o espaço das características fenotípicas dos indivíduos. Após  $k$  interações entre os indivíduos da população  $\mathcal{P}$ , determinadas aleatoriamente utilizando os valores adaptativos descritos em (1), cada indivíduo de característica fenotípica  $p_i$  tem retorno  $s_i^k$ . Quanto maior o valor de  $s_i^k$  maior é o sucesso reprodutivo do indivíduo.

Os valores  $(p_i, s_i^k)$  são então usados para determinar os parâmetros, obtidos pelo método dos Quadrados Mínimos, de uma função exponencial

$$f(p) = \alpha e^{\beta p}. \quad (2)$$

que descreve como a característica fenotípica  $p$  determina o valor do sucesso reprodutivo dos indivíduos da população  $\mathcal{P}$  após  $k$  interações através do Dilema do Prisioneiro.

A geração seguinte  $\tilde{\mathcal{P}}$  é então gerada com distribuição de probabilidade  $\tilde{d}$  sobre o espaço das características fenotípicas  $[0, 1]$  dada por

$$\tilde{d}(p) = cf(p)d(p), \quad (3)$$

em que  $c$  é a constante de normalização.

#### 3.1.1 Simulação computacional

Pela natureza estocástica do modelo proposto, apresentamos aqui alguns resultados obtidos em simulações computacionais.

Cada população é composta por  $N = 100$  indivíduos com características  $I_i = (p_i, s_i)$  em que o fenótipo  $p_i$  está distribuído de acordo com a função densidade dada por (3). Para a população inicial, usamos a distribuição uniforme sobre  $[0, 1]$ . Todos os indivíduos de cada população são inicialmente gerados com  $s_i = 0$ . Após iniciada uma população, pares de indivíduos são selecionados aleatoriamente para interagirem pelo Dilema do Prisioneiro com probabilidades de cooperação de cada indivíduo definidas de acordo com suas características fenotípicas  $p_i$  e  $p_j$  e os valores de  $s$  são atualizados para ambos, de acordo com o resultado da interação, utilizando os dados de (1). Para cada população, realizamos um

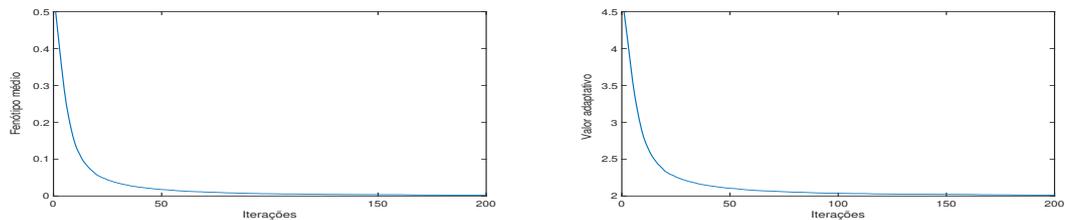


Figura 1: Em ambos os gráficos, cada iteração representa uma população com  $N$  indivíduos geradas a partir de (3). À esquerda, vemos a média dos fenótipos  $e$ , à direita, vemos a soma dos valores adaptativos médios dos indivíduos em cada população.

total de  $k = 10000$  interações do Dilema do Prisioneiro e em seguida, uma nova população é gerada com função densidade dada por (3).

Os gráficos da Figura 1 foram gerados com a média aritmética de 150 repetições do modelos aqui proposto. Como podemos notar, o processo de seleção natural seleciona os indivíduos cujo fenótipo confere menor probabilidade de cooperar em uma interação do Dilema do Prisioneiro. A soma dos valores adaptativos médios próximos a 2 indica que ambos os indivíduos tem uma alta probabilidade de desertarem da a cooperação como estratégia na interação.

### 3.2 A influência da reputação

No modelo da seção anterior consideramos apenas o caso em que os indivíduos cooperam ou desertam da cooperação de acordo com uma probabilidade que depende apenas do próprio indivíduo. Nesta seção, vamos assumir que os indivíduos tem acesso ao histórico do comportamento do seu oponente em interações anteriores com outros indivíduos da população em que estão inseridos. Esse histórico é então utilizado para ajustar o comportamento dos indivíduos envolvidos na interação. Vamos considerar ainda que que o peso conferido ao histórico do seu oponente da interação é uma característica individual e portanto, pode diferir entre os indivíduos da população. Isto é, cada indivíduo pode conferir um peso diferente para a reputação do seu oponente. Essa variabilidade do uso da reputação de seu oponente por parte dos indivíduos pode determinar diferentes valores de sucesso reprodutivo, medido de acordo do retorno, de modo que então podemos considerar um processo evolução por seleção natural sobre a mesma.

Assim, o modelo que propomos nesta seção é composto de duas partes: um modelo para a interação dos indivíduos que leve em conta a reputação do oponente e um modelo para a evolução do peso dado à reputação de cada indivíduo da população através do processo de seleção natural.

#### 3.2.1 A interação com reputação

Em uma população com  $N$  indivíduos, cada indivíduo  $i$  é definido por uma quadrupla  $I_i = (a_i, p_i, r_i, s_i)$  em que  $a_i \in [0, 1]$  é o peso dado para a reputação do oponente,  $p_i$  representa a probabilidade de cooperação do indivíduo em uma interação,  $r_i$  é a soma

da *reputação* do indivíduo adquirida ao longo das interações na população e  $s_i$  é a soma dos valores adaptativos obtidos em cada interação entre indivíduos. A interação entre os indivíduos ocorre de maneira aleatória e provocando alterações nos valores de  $r$  e  $s$  dos oponentes.

Como anteriormente, aqui também os indivíduos interagem por da matriz (1). Por outro lado, a reputação do indivíduo adquirida em cada interação é determinada pela matriz

$$\begin{matrix} & C & D \\ \begin{matrix} C \\ D \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}. \quad (4)$$

Assim, ao desertar de cooperar em uma interação, o indivíduo pode receber um retorno 5, caso o oponente coopere, ou 1, caso o oponente não coopera. Em contrapartida, o desertor pode ter sua reputação alterada  $-1$  ou  $0$ , de acordo com a estratégia adotada pelo oponente. Dessa forma, o histórico das estratégias adotadas pelo indivíduo ao longo das interações em uma população é dado por sua reputação  $r$ .

Como podemos ver facilmente, o valor de  $r$  é crescente com o número de cooperações adotadas nas interações e portanto, vamos modelar a relação entre a probabilidade de cooperação e sua reputação pela função:

$$q(r) = \frac{1}{1 + ce^{-kr}}. \quad (5)$$

Além disso, vamos considerar ainda que ao interagir com um indivíduo  $j$ , definido por  $I_j = (a_j, p_j, r_j, s_j)$  a probabilidade de cooperação de um indivíduo  $i$ , definido por  $I_i = (a_i, p_i, r_i, s_i)$ , seja dada por:

$$p = (1 - a_i)p_i + a_iq(r_j). \quad (6)$$

Isto é, a probabilidade do indivíduo  $i$  cooperar na interação é a média ponderada entre a sua própria probabilidade de cooperação e a probabilidade inferida por meio do reputação do oponente.

### 3.2.2 A evolução do peso da reputação

Como podemos ver pela expressão (6), a probabilidade de cooperar depende do peso que o indivíduo está adotando para a reputação do seu oponente na interação. Sendo assim, indivíduos a variabilidade exigida no processo de seleção natural é determinada pelos valores de  $a_i \in [0, 1]$  adotados pelos indivíduos. Isto é, o peso  $a_i$  pode ser considerado uma característica fenotípica sujeita ao processo de seleção natural.

Nesta seção, estamos interessados em descrever como o processo de seleção natural pode guiar os indivíduos de uma população a levarem em consideração a reputação dos oponentes na escolha da estratégia em interações por meio do Dilema do Prisioneiro. Assim, vamos propor aqui um modelo probabilístico para evolução da característica fenotípica  $a_i$  por meio do processo de seleção natural.

Assim como anteriormente, em cada iteração do modelo de evolução, uma população  $\mathcal{P}$  com  $N$  indivíduos é gerada obedecendo uma distribuição de probabilidade  $d$  sobre o

intervalo  $[0, 1]$ , o espaço das características fenotípicas dos indivíduos. Após  $k$  interações entre os indivíduos da população  $\mathcal{P}$ , determinadas aleatoriamente utilizando o modelo da seção anterior, cada indivíduo de característica fenotípica  $a_i$  tem retorno  $s_i^k$ . Como anteriormente,  $s_i^k$  representa o sucesso reprodutivo do indivíduo de característica fenotípica  $a_i$  após  $k$  interações entre os indivíduos da população. Quanto maior o valor de  $s_i^k$  maior é o sucesso reprodutivo do indivíduo.

Como na seção anterior, usamos o método dos Quadrados Mínimos no conjunto de valores  $(a_i, s_i^k)$  para determinar os parâmetros de uma função exponencial

$$f(a) = \alpha e^{\beta a}. \tag{7}$$

Neste caso, a função  $f$  descreve como a característica fenotípica  $a$ , isto é, o peso dado ao histórico de interações do oponente, determina o valor do sucesso reprodutivo dos indivíduos da população  $\mathcal{P}$  após  $k$  interações do Dilema do Prisioneiro.

A população seguinte  $\tilde{\mathcal{P}}$  é gerada com distribuição de probabilidade  $\tilde{d}$  sobre o espaço das características fenotípicas  $a \in [0, 1]$  dada por

$$\tilde{d}(a) = cf(a)d(a), \tag{8}$$

em que  $c$  é a constante de normalização.

### 3.2.3 Simulação computacional

Pela natureza estocástica do modelo proposto, apresentamos aqui alguns resultados obtidos em simulações computacionais.

Cada população é composta por  $N = 100$  indivíduos com características  $I_i = (a_i, p_i, r_i, s_i)$  em que o fenótipo  $a_i$  está distribuído de acordo com a função densidade dada por (8). Para a população inicial, usamos a distribuição uniforme sobre  $[0, 1]$ . Em todas as populações a probabilidade  $p_i$  de cooperação de cada indivíduo é também obtida por uma distribuição uniforme sobre  $[0, 1]$ . Todos os indivíduos de cada população são inicialmente gerados com  $r_i = s_i = 0$ . Após iniciada uma população, pares de indivíduos são selecionados aleatoriamente para interagirem pelo Dilema do Prisioneiro com probabilidades de cooperação de cada indivíduo definidas de acordo com (6) e os valores de  $s$  e  $r$  são atualizados para ambos, de acordo com o resultado da interação, utilizando os dados de (1) e (4), respectivamente. Para cada população, realizamos um total de  $k = 10000$  do Dilema do Prisioneiro. Em seguida, uma nova população é gerada com função densidade dada por (8).

Os gráficos da Figura 2 foram gerados com a média aritmética de 150 repetições do procedimento descrito acima. Como podemos notar, o processo de seleção natural seleciona os indivíduos cujo fenótipo confere maior peso para reputação do oponente promovendo assim a cooperação dos indivíduos conforme indicado no gráfico à direita. A soma dos valores adaptativos médios próximos a 6 indica que ambos os indivíduos tem uma alta probabilidade de adotarem a cooperação como estratégia na interação.

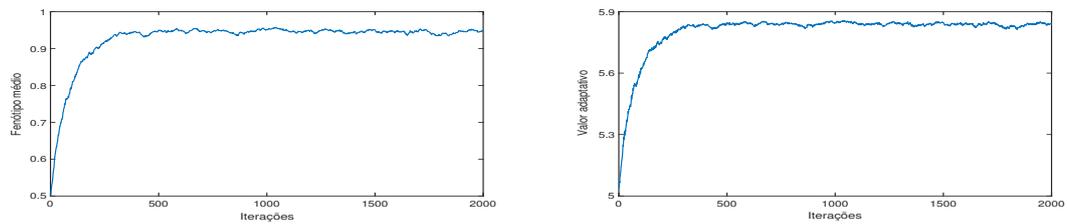


Figura 2: Em ambos os gráficos, o eixo  $x$  representa o número de populações geradas a partir de (8). À esquerda, vemos a média dos fenótipos de cada população. À direita, vemos a soma dos valores adaptativos médios dos indivíduos em cada população.

## 4 Conclusões

Propomos aqui dois modelos probabilísticos para a descrever a evolução de indivíduos interagindo por meio do Dilema do Prisioneiro. Em ambos os modelos, os indivíduos são definidos por características fenotípicas que possuem diferentes valores adaptativos de modo que a evolução de tais características estão sujeitas ao processo de seleção natural. No primeiro modelo, o fenótipo de cada indivíduo é a probabilidade do mesmo cooperar no Dilema do Prisioneiro. Conforme mostram as simulações, a evolução leva os indivíduos a herdarem fenótipos cada vez menos cooperativos. No segundo modelo, o fenótipo de cada indivíduo é o peso que o mesmo confere ao histórico, ou a reputação, de interações do seu oponente. Como vemos pelas simulações, a população evolui para um estado em que os indivíduos passam a dar maior importância para o histórico do oponente na interação, cooperando com maior probabilidade com indivíduos com um bom histórico de cooperação e desertando da cooperação quando interagindo com indivíduos com baixa reputação. Embora ambos os modelos forneçam resultado que estão em consonância com os já estabelecidos na literatura tais como [1] e [3], o segundo modelo que propomos nos permite entender como o processo de seleção natural pode agir em uma população a fim de que tal população passe a adotar a reputação como estratégia de decisão de cooperar ou desertar da cooperação em uma interação do Dilema do Prisioneiro.

## Referências

- [1] R. Axelrod, W. D. Hamilton. The Evolution of Cooperation, *Science*, v. 211, p. 1390–1396, 1981.
- [2] C. Darwin. The origin of species, 1936.
- [3] R. Lewontin. Evolution and the theory of games, *Journal of Theoretical Biology*, v. 1, n. 3, p. 382 – 403, 1961.
- [4] M. A. Nowak. *Evolutionary Dynamics: Exploring the Equations of Life*, Harvard University Press, 2006.
- [5] J. Smith. *Evolution and the Theory of Games*, Cambridge University Press, 1982.