Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 7, n. 1, 2020.

Trabalho apresentado no XXXIX CNMAC, Uberlândia - MG, 2019.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Abordagens Fracionárias para o Oscilador Harmônico

Stefânia Jarosz[1]
Departamento de Matemática Aplicada, IMECC, UNICAMP, Campinas, SP, Brazil
Marina Lima[2]
Departamento de Matemática Aplicada, IMECC, UNICAMP, Campinas, SP, Brazil
Jayme Vaz Jr.[3]
Departamento de Matemática Aplicada, IMECC, UNICAMP, Campinas, SP, Brazil

1 Introdução

O cálculo de ordem não inteira, apesar de não ser um assunto recente, vem atraindo crescente atenção ao longo dos anos devido à sua ampla gama de possíveis aplicações em problemas de interesse científico e tecnológico. Popularmente conhecido como Cálculo Fracionário, esta área possui como principais características a generalização das técnicas tradicionais de integração e diferenciação, bem como a introdução da não-localidade como propriedade intrínseca de seus operadores, o que pode, entre outras interpretações, ser entendido como a incorporação de uma propriedade de memória à descrição de sistemas físicos.

Neste trabalho, discutiremos algumas versões fracionárias para a Equação do Oscilador Harmônico, onde a presença da derivada fracionária desempenha um papel relacionado ao amortecimento do sistema. Como esse tipo de problema requer uma condição inicial, mostra-se bastante conveniente adotar uma abordagem que envolva a derivada fracionária segundo Caputo, o que também nos permite utilizar o método da Transformada de Laplace para resolver as equações pertinentes ao problema proposto [3]. Além do tradicional modelo do Oscilador Harmônico Fracionário com a derivada de Caputo, proporemos novos modelos, utilizando as definições propostas por Fabrizio e Caputo, que já se mostrou útil na descrição de problemas envolvendo materiais heterogêneos e estruturas com diferentes escalas [1], e Prabhakar, que aparece em modelos que descrevem propriedades dos dielétricos anômalos em materiais desordenados e de sistemas heterogêneos [2].

[1]stjarosz@gmail.com
[2]marina@ime.unicamp.br
[3]vaz@ime.unicamp.br

2 Oscilador Harmônico

O modelo clássico para o oscilador harmônico é dado pela equação diferencial

$$mx''(t) + bx'(t) + kx(t) = 0, \tag{1}$$

com $m > 0$, $b \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{R}$. O termo b refere-se ao amortecimento e, para o caso $b = 0$, temos o Oscilador Harmônico Simples.

Estudaremos modelos fracionários para osciladores baseados na equação do oscilador harmônico simples, isto é, equações na forma

$$m\frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} + kx(t) = 0, \tag{2}$$

onde $1 < \alpha \leq 2$ e d^α/dt^α refere-se a uma derivada fracionária segundo alguma das definições escolhidas para este trabalho (Caputo, Fabrizio-Caputo ou Prabhakar).

3 Conclusões

Embora existam abordagens em que a ordem não-inteira resida no termo de fricção, optamos por estudar modelos que são uma versão modificada da Equação do Oscilador Harmônico Simples, em que a derivada fracionária esteja localizada no termo de segunda ordem, uma vez que o efeito de amortecimento pode aparecer no caso em que a ordem da derivada assume valores não-inteiros. Em particular, observamos que os sistemas estudados se reduzem a Osciladores Harmônicos Simples quando o valor da ordem fracionária é $\alpha = 2$, e para valores não-inteiros, o sistema passa a apresentar um amortecimento, que se intensifica à medida que a ordem da derivada diminui.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao CNPq e à CAPES pelo auxílio financeiro.

Referências

[1] M. Caputo and M. Fabrizio. Applications of new time and spatial fractional derivatives with exponential kernels, *Progr. Fract. Differ. Appl.*, 2:1–11, 2016.

[2] A. Giusti and I. Colombaro. Prabhakar-like fractional viscoelasticity, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 56:138–143, 2018.

[3] E.C. de Oliveira, S. Jarosz and J. Vaz Jr. Fractional calculus via Laplace transform and its application in relaxation processes, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 69:58–72, 2019.

