

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Sobre a realização de grafos de Reeb associados a germes de aplicações diferenciáveis

Erica Boizan Batista ¹

Universidade Federal do Cariri, UFCA, Juazeiro do Norte, CE

João Carlos Ferreira Costa ²

Universidade Estadual Paulista, UNESP, São José do Rio Preto, SP

1 Introdução

Um problema central em Teoria de Singularidades é estudar a classificação de germes de aplicações de classe C^∞ via mudanças de coordenadas na fonte e na meta.

Neste trabalho nosso interesse está voltado à classificação topológica de germes de aplicações finitamente determinados de classe C^∞ de $(\mathbb{R}^3, 0)$ em $(\mathbb{R}^2, 0)$, ou seja, nossas mudanças de coordenadas serão homeomorfismo, o que recebe o nome de *equivalência topológica* (ou C^0 - \mathcal{A} -*equivalência*).

Trabalhos sobre temas relacionados à equivalência topológica de germes de aplicações surgiram recentemente. Especificamente sobre a classificação topológica de singularidades \mathcal{A} -finitamente determinadas podemos citar [1], [2], [3], [4], [5] e [6].

Vale ressaltar que restringir-se à classe dos germes finitamente determinados é algo bem natural em Singularidades, uma vez que esta noção tem papel chave na teoria. De fato, a noção de determinação finita permite que, a menos de \mathcal{A} -equivalência, o germe possa ser representado por um polinômio.

A idéia central dos trabalhos citados anteriormente consiste em olhar para o chamado link de um germe finitamente determinado $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$. O link de f é obtido tomando um representante suficientemente pequeno $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ e a interseção de sua imagem com uma esfera suficientemente pequena S_ϵ^{p-1} centrada na origem em \mathbb{R}^p . Segue de um teorema de Fukuda que se f é um germe finitamente determinado, então f tem uma estrutura cônica sobre seu link. Em particular, em [1] e [2] os autores mostraram que uma variação do grafo de Reeb é invariante topológico completo para o caso em que $f : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ é um germe finitamente determinado.

¹erica.batista@ufca.edu.br

²jcosta@ibilce.unesp.br

2 Critérios para realização

Dado um grafo conexo qualquer, é natural nos perguntarmos se é possível encontrar um germe de aplicação $f : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ finitamente determinado cujo grafo de Reeb do link associado a f seja equivalente a esse grafo.

Claramente a resposta para essa pergunta é não pois o fato do grafo de Reeb estar associado a uma aplicação estável faz com que seus vértices tenham grau máximo igual a 4. Portanto, nenhum grafo que possua um vértice de grau maior ou igual a 5 poderá ser realizado como grafo de Reeb do link associado a um germe $f : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ finitamente determinado.

Assim, podemos modificar nossa pergunta para: Que condições um grafo deve satisfazer para que seja realizável como grafo de Reeb de um germe de aplicação $f : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ finitamente determinado?

Neste trabalho nos concentramos em sintetizar as informações obtidas em [1] e [2] para exprimir as características que um grafo deve ter para que este seja realizado como grafo de Reeb do link associado a um germe com símbolo de Boardman $\Sigma^{2,1}$.

Referências

- [1] E. B. Batista, J.C.F. Costa, J.J. Nuño-Ballesteros, The Reeb graph of a map germ from \mathbb{R}^3 to \mathbb{R}^2 with isolated zeros, *Proc. Edinb. Math. Soc.* (2) 60 (2017), no. 2, 319–348.
- [2] E. B. Batista, J.C.F. Costa, J.J. Nuño-Ballesteros, The Reeb graph of a map germ from \mathbb{R}^3 to \mathbb{R}^2 with non isolated zeros, *Bull. Braz. Math. Soc.* (N.S.) 49 (2018), no. 2, 369–394.
- [3] W. L. Marar, J. J. Nuño-Ballesteros, The doodle of a finitely determined map germ from \mathbb{R}^2 to \mathbb{R}^3 , *Adv. Math.* 221 (2009) 1281–1301.
- [4] R. Martins, J. J. Nuno-Ballesteros, Finitely determined singularities of ruled surfaces in \mathbb{R}^3 , *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 147 (2009), no. 3, 701–733.
- [5] J. A. Moya-Perez, J. J. Nuno-Ballesteros, The link of finitely determined map germ from \mathbb{R}^2 to \mathbb{R}^2 , *J. Math. Soc. Japan* 62, no. 4 (2010) 1069–1092.
- [6] J. A. Moya-Perez, J. J. Nuno-Ballesteros, Topological properties of finitely determined map germs from \mathbb{R}^3 to \mathbb{R}^3 , preprint 2011.
- [7] J. A. Moya-Pérez, J. J. Nuño-Ballesteros, Topological classification of corank 1 map germs from \mathbb{R}^3 to \mathbb{R}^3 , *Rev. Mat. Complut.* (2014), doi:10.1007/s13163-013-0137-z