Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Estudo Comparativo entre os Métodos de Rutishauser (LR) e de Francis (QR)

Hedjany Sena da Silva[1]
Modesto Valci Moreira Lopes[2]
Wesliane Maia do Amaral[3]
Ivan Mezzomo[4]
Matheus da Silva Menezes[5]
Departamento Ciências Naturais, Matemática e Estatística, UFERSA, Mossoró, RN

1 Referencial Teórico

Segundo [2], autovalores e autovetores estão presentes em diferentes ramos da matemática e podem ser usados para resolver problemas de diversos campos, como economia, teoria da informação, análise estrutural, eletrônica, teoria de controle e muitos outros.

Para se obter os autovalores de uma matriz quadrada é necessário inicialmente determinar o seu polinômio característico, no entanto, em matrizes de ordem maior esse procedimento torna-se inviável. Portanto, para garantir a resolução desses problemas maiores são utilizados métodos numéricos, que encontram os autovalores sem ter que determinar o polinômio característico da matriz. Dentre esses métodos numéricos podemos citar o método de Rutishauser (LR) e o método de Francis (QR).

O objetivo desse trabalho é comparar a eficiência do método de Rutishauser (LR) e o método de Francis (QR) em estimar o autovalor dominante através da análise do número de iterações e o tempo de execução.

Método LR: [2] Seja A uma matriz quadrada de ordem n, o método LR consiste em construir uma sequência de matrizes através da decomposição LU da seguinte forma:

$$A_k = R_{k-1}L_{k-1} = L_kR_k \tag{1}$$

onde L representa uma matriz triangular inferior com todos os elementos da diagonal principal 1, R é uma matriz triangular superior e k o número de iterações. Os elementos diagonais da matriz A_k serão os autovalores da matriz A.

Método QR: [1] Seja A uma matriz real simétrica quadrada tridiagonal de ordem n, o método QR consiste em construir uma sequência de matrizes da seguinte forma:

$$A_k = R_{k-1}Q_{k-1} = Q_kR_k \tag{2}$$

[1]hedjany@icloud.com
[2]modsval@gmail.com
[3]weslianemaia1@gmail.com
[4]imezzomo@ufersa.edu.br
[5]matheus@ufersa.edu.br

na qual Q é uma matriz ortogonal, R é uma matriz triangular superior e k é o número de iterações. Para obtermos a matriz tridiagonal, foi aplicado o método de Householder, que reduz uma matriz simétrica arbitrária a uma matriz tridiagonal semelhante.

2 Resultados e Discussões

As matrizes foram obtidas a partir dos repositórios Matrix Market e Florida Sparse Matrix Collection. Os métodos foram implementados no software MatLab R2014a em uma máquina i5 de processador 2.90 GHz e 8 GB de memória RAM. Como critério de parada, usamos a distância relativa, com precisão $\varepsilon < 10^{-4}$. Na Tabela 1 estão dispostas as características dos problemas analisados e na Tabela 2 o resultado dos experimentos analisados.

Tabela 1: Característica dos problemas

Problema	Ordem	Área do problema	Tipo
bcsstk01	48	análise dinâmica de estruturas	real, simétrica e definida positiva
gent113	113	dinâmica dos fluídos	binária e padrão assimétrica
rdb200l	200	problema 2D/3D	real assimétrica
pde225	250	problema eletromagnético	real assimétrica
utm300	300	problema eletromagnético	real assimétrica
494_bus	494	redes de sistema de energia	real assimétrica

Tabela 2: Resultado dos experimentos realizados

		QR			LR		
Problema	Ordem	Autovalor	# Iteração	Tempo	Autovalor	# Iteração	Tempo
bcsstk01	48	$3{,}0152\times10^9$	1128	0,46445	$3{,}0152\times10^9$	1002	0,70996
gent113	113	4,5722	33	0,09	4,5702	60	0,2374
rdb200l	200	9,16394	89	0,4733	9,16397	207	1,2286
pde225	250	8,3211	158	1,1629	-	-	-
utm300	300	1,4615	51	0,530	1,3104	40	0,6529
494_bus	494	3005	568	19,813	3005	113	34,4719

Analisando os resultados da Tabela 2, quanto ao tempo de processamento, o método QR apresentou melhor eficiência em todos problemas analisados quando comparado ao método LR. Quanto ao número de iterações, o Método QR se mostrou mais eficiente em três dos seis problemas analisados. Vale ressaltar que o método LR apresentou dificuldade em determinar o autovalor no problema pde225, não convergindo, portanto para o resultado. Quanto ao número de iterações, nos problemas bcsstk01, utm300 e 949_bus, a eficiência do método LR em relação ao QR variou de 11,17% a 80%, ao passo que nos problemas gent113, rdb200l, a eficiência do método QR em relação ao LR variou de 45% a 57%. No entanto, quanto ao tempo de processamento o método QR foi mais eficiente em todos os casos, com efetividade entre 18,82% a 62,09%. Cabe ressaltar, que na matriz utm300, o autovalor exato é 1,5094 sendo assim, o método QR obteve melhor aproximação com erro relativo de 3,17% enquanto que no método LR foi de 13,18%.

Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio da UFERSA e do CNPq na execução deste trabalho.

Referências

[1] R. L. Burden, D. Faires and A. M. Burden. *Análise Numérica, 3a edição*. Cengage Learning, São Paulo, 2015.

[2] N. B. Franco. *Cálculo Numérico, 6a Edição*. Pearson, São Paulo, 2006.