

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Estudo Comparativo entre os Métodos das Potências e da Potência Inversa

Modesto Valci Moreira Lopes¹

Hedjany Sena da Silva²

Ivan Mezzomo³

Matheus da Silva Menezes⁴

Departamento Ciências Naturais, Matemática e Estatística, UFERSA, Mossoró, RN

Stefeson Bezerra de Melo⁵

Departamento de Ciências Exatas, Tecnológicas e Humanas, UFERSA, Campus Angicos, RN

1 Referencial Teórico

Esse trabalho tem como objetivo comparar o Método das Potências (MP) e o Método da Potência Inversa (MPI) em relação ao número de iterações. O Método das Potências consiste em determinar o maior autovalor em módulo e seu autovetor associado, de uma matriz quadrada A , sem a necessidade de descobrir o polinômio característico. No entanto, esse método é útil desde que o maior autovalor a ser determinado tiver seu valor em módulo grande e que estejam bem separados dos demais. Segundo [2], o MP é dado por:

Teorema 1: *Dado uma matriz real quadrada A de ordem n e seus autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ com seus correspondentes autovetores u_1, u_2, \dots, u_n . Suponha que os autovetores são linearmente independentes e que $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$. A sequência y_k definida por*

$$y_{k+1} = Ay_k \quad (1)$$

com $k = 1, 2, \dots$, onde y_0 é um vetor arbitrário que permite a expansão $y_0 = \sum_{j=1}^n c_j u_j$, com c_j escalares quaisquer e $c_1 \neq 0$, então $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(y_{k+1})_r}{(y_k)_r} = \lambda_1$, onde r indica a r -ésima componente.

Quanto maior for $|\lambda_1|$ quando comparado com $|\lambda_2|$, mais rápida será a convergência.

Segundo [2], o MPI é usado para determinar o autovalor de menor valor absoluto e seu correspondente autovetor de uma matriz A . Esse método é semelhante ao MP com a diferença que agora assumimos $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots < |\lambda_n|$ e desejamos determinar λ_n . Sabemos que se λ é autovalor de A , então λ^{-1} é autovalor de A^{-1} . Além disso, se λ_n é o menor autovalor de A , então $|\lambda_n^{-1}|$ é o maior autovalor de A^{-1} .

¹modsva@gmail.com

²hedjany@icloud.com

³imezzomo@ufersa.edu.br

⁴matheus@ufersa.edu.br

⁵stefeson@ufersa.edu.br

No entanto, para [1], o MPI é uma modificação do MP que permite uma convergência mais rápida. Supondo agora que uma matriz A tenha autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ com autovetores linearmente independentes u_1, u_2, \dots, u_n , temos que os autovalores de $(A - qI)^{-1}$, em que $q \neq \lambda_i$, para $i = 1, 2, \dots, n$ são $\frac{1}{\lambda_1 - q}, \frac{1}{\lambda_2 - q}, \dots, \frac{1}{\lambda_n - q}$. Aplicando o MP a matriz $(A - qI)^{-1}$, temos

$$y_{k+1} = (A - qI)^{-1}y_k \tag{2}$$

onde y_{k+1} é o vetor que se armazena os autovalores da matriz a cada iteração e o cálculo do q é baseado no Teorema do círculo de Gersgorin, onde q é a soma de todos os valores da matriz dividido pelo número de colunas ou linhas.

2 Resultados e Discussões

As matrizes foram obtidas através do repositório Florida Sparse Matrix Collection. Todas as matrizes selecionadas são do tipo padrão assimétricas, não esparsas e não diagonalmente dominantes. Visando analisar a funcionalidade do algoritmo proposto, efetuamos a implementação dos métodos no SciLab 5.5.2 em uma máquina com processador Intel Core i5, 4GB de RAM e sistema operacional Windows 10. Como critério de parada, usamos o teste do erro absoluto para cada componente de λ_1 dada por $|\lambda_1^{(k+1)} - \lambda_1^{(k)}|_r < \varepsilon$, com precisão $\varepsilon < 10^{-5}$. Na tabela, os dados da coluna eficiência se referem ao percentual de eficiência do MPI com relação ao MP.

Tabela 1: Resultado dos experimentos realizados

Problema	Ordem	Autovalor MP	Iterações MP	Autovalor MPI	Iterações MPI	Eficiência
jgl009	9	5.0369961	18	5.0369960	13	+27,78%
jgl011	11	6.7799932	22	6.7799930	09	+59,09%
gd01_b	18	2.09491	153	2.09491	23	+ 84,97%
Ibm32	32	4.2240813	33	4.2240810	16	+51,52%
will199	199	3.5725534	104	3.5725530	12	+88,46%

Analisando a tabela acima, podemos observar que ambos os métodos convergiram em todas as matrizes. No entanto, o MPI se mostrou mais eficiente em relação ao número de iterações em todos os problemas, onde a economia de processamento para as matrizes estudadas ficou entre 27,78% e 88,46%. Porém, o MP não apresentou restrições durante a sua execução como foi apresentado no MPI, pois não foi possível executar matrizes de ordem maior que 199 ou do tipo real assimétrica, uma vez que exigiu armazenamento computacional que ultrapassava a capacidade da máquina utilizada para os testes (capacidade de pilha).

Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio da UFERSA e do CNPq na execução deste trabalho.

Referências

- [1] R. L. Burden, D. Faires and A. M. Burden. *Análise Numérica, 3a edição*. Cengage Learning, São Paulo, 2015.
- [2] N. B. Franco. *Cálculo Numérico, 6a Edição*. Pearson, São Paulo, 2006.