Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Uma abordagem das soluções de sistema lineares via espaços linha, coluna e nulo

Flavio Augusto Leite Taveira [1]
Unesp, Ilha Solteira-SP
Jaime Edmundo Apaza Rodriguez [2]
Departamento de Matemática, Unesp-Ilha Solteira-SP

1 Resumo

Como todo objeto matemático, os sistemas lineares têm suas características próprias, ou seja, aquelas que as definem ou caracterizam. Nesse sentido, a característica que queremos realçar neste trabalho é a possibilidade de suas possíveis soluções. Com isso, pretendemos mostrar que o fato de um sistema linear ser consistente determinado (solução possível e admitir uma única solução), consistente indeterminado (admitir infinitas soluções) ou inconsistente (não admitir alguma solução) está intimamente relacionado com os conceitos de Espaço Linha, Espaço Coluna e Espaço Nulo da matriz associada ao sistema linear. Deste modo, os objetivos deste trabalho são discutir as seguintes conexões:

a) Quais são as relações entre as soluções de um sistema genérico $AX = B$ com os espaços linha, coluna e nulo da matriz A?;

b) Quais as relações entre o espaço linha, coluna e nulo da matriz A?

Seja A uma matriz $m \times n$ dada por

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

onde os vetores $r_1 = [a_{11} \ldots a_{12}]$, $r_2 = [a_{21} \ldots a_{2n}]$,$\ldots$, $r_m = [a_{m1} \ldots a_{mn}]$ em $\mathbb{R}^n$, formados pelas linhas de A, são chamados os **vetores-linha** de A e os vetores

$$c_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, c_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \ldots, c_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

em $\mathbb{R}^n$, formados pelas colunas de A, são chamados os **vetores-coluna** de A.

[1] flaviotaveira16@gmail.com
[2] aqpjaime@gmail.com

Se A é uma matriz $m \times n$, então o subespaço de $\mathbb{R}^n$ gerado pelos vetores-linha de A é chamado de Espaço-Linha de A e o subespaço de $\mathbb{R}^m$ gerado pelos **vetores-coluna** de A é chamado **espaço-coluna** de A. O espaço-solução do sistema homogêneo de equações $AX = 0$, que é subespaço de $\mathbb{R}^n$, é chamado o **espaço-nulo** de A.

Para respondermos as questões mencionadas na página 1, considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad e \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Sendo os vetores $c_1, c_2, \ldots, c_n$, os vetores-coluna de A, então o produto AX pode ser expresso por meio de uma combinação linear dos vetores-coluna, ou seja, $AX = x_1c_1 + x_2c_2 + ... + x_nc_n$. Assim, um sistema linear de m equações e n incógnitas pode ser reescrito por $x_1c_1 + x_2c_2 + ... + x_nc_n = B$.

Concluimos que $AX = B$ é consistente se, e somente se, B pode ser expresso como uma combinação linear dos vetores coluna de A, ou equivalentemente se, e somente se, B está no espaço-coluna de A.

Teorema 1.1. *([1]) Se X_0 é uma solução particular de um sistema linear consistente $AX = B$ e se $v_1, v_2, ..., v_k$ formam uma base do espaço-nulo de A, ou seja, do espaço-solução do sistema homogêneo $AX = 0$, então cada solução de $AX = B$ pode ser escrita na forma $X = x_0 + v_1c_1 + v_2c_2 + ... + v_kc_k$.*

Reciprocamente, para qualquer escolha de escalares $c_1, c_2, ..., c_k$, o vetor X é uma solução de $AX = B$.

Demonstração: Suponha que X_0 é uma solução de $AX = B$ e que X é uma solução arbitrária. Então, $AX - AX_0 = B$ ou $A(X - X_0) = B$. Isto mostra que $X - X_0$ é uma solução do sistema homogêneo $AX = 0$. Como os vetores $v_1, \ldots, v_k$ formam uma base do espaço-solução do sistema, então podemos escrever $X - X_0$ como uma combinação linear dos vetores $v_1, \ldots, v_k$. Assim, $X - X_0 = v_1c_1 + v_2c_2 + \ldots + v_kc_k$. Logo, $X = X_0 + v_1c_1 + v_2c_2 + \ldots + v_kc_k$, o que prova a primeira parte do resultado.

Reciprocamente, para qualquer escolha dos escalares $c_1, c_2, ..., c_k$, temos que $AX = A(X_0 + v_1c_1 + v_2c_2 + \ldots + v_kc_k)$. Logo $AX = AX_0 + A(v_1)c_1 + ... + A(v_k)c_k$.

Como X_0 é uma solução do sistema não-homogêneo e $v_1, v_2, ..., v_k$ são soluções do sistema homogêneo, já que formam a base do espaço solução do sistema homogêneo, temos que $AX = B + 0 + 0 + \ldots + 0 = B$, o que mostra que X é uma solução de $AX = B$.

Referências

[1] H. Anton and C. Rorres. *Álgebra linear com Aplicações, 8a. edição.* Porto Alegre; Bookman, 2001.

