Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 7, n. 1, 2020.

Trabalho apresentado no XXXIX CNMAC, Uberlândia - MG, 2019.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Cálculo da divisão de polinômios de várias variáveis

André Luis Martins Tomaz da Silva [1]
Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal
Patrícia Borges dos Santos [2]
Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal

1 Introdução

Neste trabalho pretendemos calcular a divisão de polinômios em várias variáveis através do algoritmo de divisão em mais de uma variável. Para tanto fixamos uma ordem no anel de polinômios e então efetuamos os passos do algoritmo apresentado em [1].

2 Algoritmo e cálculo da divisão de polinômios em várias variáveis

Vamos iniciar apresentando algumas definições que serão importantes ao longo do texto. Antes de tudo vamos precisar fixar uma ordem monomial. A ordem monomial escolhida para este trabalho foi a ordem lexicográfica, mas cabe ressaltar que o algoritmo abaixo independe da ordem escolhida. Usando a notação de multi-índices, se x^α e x^β são dois monômios, na ordem lexicográfica, temos $x^\alpha >_{lex} x^\beta$ se a entrada mais à esquerda do vetor $\alpha - \beta$ for positiva. O termo inicial de f com respeito a ordem $>$, denotado por $in(f)$, é o termo de f cujo suporte é o maior monômio de $sup(f)$ respeitando à ordem $>$ dada.

Algoritmo da divisão em mais de uma variável. Dados polinômios f e $g_1, \ldots, g_s$ de $K[x_1, \ldots, x_n]$, ordenados sob uma ordem monomial $>$, o algoritmo tem como saída polinômios $q_1, \ldots, q_s$ e r tais que

$$f = q_1 g_1 + \cdots + q_s g_s + r$$

sendo r = 0 ou nenhum monômio de r é divisível pelos termos iniciais $in(g_1), \ldots, in(g_s)$.

Etapa 1: Inicializa $F = f, Q_1 = \cdots = Q_s = 0$ e $R = 0$.

[1] andre.tomaz@ufu.br
[2] patriciabs@ufu.br

Etapa 2: Enquanto $F \neq 0$, verifique se existe algum inteiro i entre 1 e s para o qual $in(g_i)$ divide $in(f)$. Se existir, escolha j como sendo o menor deles e faça:

$$Q_j = Q_j + \frac{in(F)}{in(g_j)}; \qquad F = F - \frac{in(F)}{in(g_j)} g_j; \qquad R = R,$$

deixando as demais variáveis inalteradas, se tal i não existir, faça:

$$F = F - in(f); \qquad R = R + in(f),$$

deixando as demais variáveis inalteradas.

Etapa 3: Imprima: o resto é R e os quocientes são $Q_1, \ldots, Q_s$.

A partir desse ponto vamos calcular a divisão do polinômio $f = x^2y + xy^2 + y^2$ pelos polinômios $g_1 = y^2 - 1$ e $g_2 = xy - 1$ com $x >_{lex} y$:
Primeiro passo: Neste passo apenas inicializamos as variáveis.

$$F = f = x^2y + xy^2 + y^2; \qquad R = 0; \qquad Q_1 = 0; \qquad Q_2 = 0.$$

Segundo passo: Como só $in(g_2) = xy$ divide $in(F) = x^2y$, aplicamos a primeira parte da Etapa 2, obtendo:

$$F = f - \frac{in(F)}{in(g_2)} g_2 = xy^2 + x + y^2; \qquad R = 0; \qquad Q_1 = 0; \qquad Q_2 = \frac{in(F)}{in(g_2)} = x.$$

Terceiro passo: Como $in(g_1) = y^2$ e $in(g_2) = xy$ dividem $in(F) = xy^2$, escolheremos o de menor índice, $in(g_1) = y^2$, e aplicamos a primeira parte da Etapa 2, obtendo:

$$F = f - \frac{in(f)}{in(g_1)} g_1 = 2x + y^2; \qquad R = 0; \qquad Q_1 = \tfrac{in(F)}{in(g_1)} = x; \qquad Q_2 = x.$$

Quarto passo: Como nem $in(g_1) = y^2$, nem $in(g_2) = xy$ dividem $in(F) = 2x$, aplicamos a segunda parte da Etapa 2, obtendo:

$$F = f - in(F) = y^2; \qquad R = in(F) = 2x; \qquad Q_1 = x; \qquad Q_2 = x.$$

Quinto passo: Como apenas $in(g_1) = y^2$ divide $in(F) = y^2$, aplicamos a primeira parte da Etapa 2, obtendo:

$$F = f - \frac{in(f)}{in(g_1)} g_1 = 1; \qquad R = 2x; \qquad Q_1 = Q_1 + \frac{in(F)}{in(g_1)} = x + 1; \qquad Q_2 = x.$$

Sexto passo: Como nem $in(g_1) = y^2$, nem $in(g_2) = xy$ dividem $in(F) = y$, aplicamos a segunda parte da Etapa 2, obtendo:

$$F = f - in(F) = 0; \qquad R = R + in(F) = 2x + 1; \qquad Q_1 = x + 1; \qquad Q_2 = x.$$

Observe que paramos de executar as etapas do algoritmo pois chegamos em $F = 0$. Desta forma, podemos escrever: $x^2y + xy^2 + y^2 = (y^2 - 1)(x + 1) + (xy - 1)x + 2x + 1$.

Referências

[1] S. C. Coutinho. *Polinômios e Computação Algébrica*. IMPA, Rio de Janeiro, 2012.