Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 7, n. 1, 2020.

Trabalho apresentado no XXXIX CNMAC, Uberlândia - MG, 2019.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Métodos SSP Runge-Kutta para Formulações Semidiscretas de Problemas Hiperbólicos

Deyanira R. Pineda [1]
Felipe A. G. Silva[2]
Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, IMECC, Unicamp
Maicon R. Correa [3]
Departamento de Matemática Aplicada, IMECC, Unicamp

1 Introdução

Na ausência de termos reativos, de termos de fonte, de efeitos gravitacionais e capilares, a equação da conservação da massa de uma fase fluida α, incompressível, que escoa em um meio poroso rígido pode ser dada por

$$\phi \frac{\partial s_\alpha}{\partial t} + \operatorname{div}(f_\alpha \mathbf{u}) = 0, \tag{1}$$

onde ϕ é a porosidade do meio poroso, s_α é a saturação da fase, $\mathbf{u}$ é a velocidade de Darcy da mistura e f_α é uma função, em geral não-linear, da saturação das fases que escoam, denominada função fracionária de fluxo [2]. Na verdade, esta função também é dependente das viscosidades das fases e sua não linearidade nas saturações advém de sua relação com as permeabilidades relativas das fases [3]. Equações como a Eq. (1) são protótipos de leis de conservação e estamos aqui interessados naquelas que possuem natureza hiperbólica [2].

O desenvolvimento de métodos numéricos robustos e precisos para a resolução de leis de conservação hiperbólicas é um tema desafiador que vem sendo extensamente pesquisado [1,2,5,6]. Dentre esses métodos, destacamos os métodos de volumes finitos centrais de alta ordem que evitam a resolução de problemas de Riemman para a avaliação do transporte [2,6] e os métodos de Galerkin descontínuo [1,5]. Em particular, neste trabalho, focamos em esquemas numéricos que possam ser escritos na forma semidiscreta (contínua no tempo e discreta no espaço), representada por um sistema de equações diferenciais parciais na forma

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathcal{S}}{\mathrm{d}\,t} = \mathcal{F}(\mathcal{S}) \tag{2}$$

onde $\mathcal{S}$ é um vetor contendo os coeficientes dependentes do tempo, após a discretização da equação (1) no espaço.

[1]deyanirarivero1307@gmail.com
[2]felipe.augusto.guedes@gmail.com
[3]maicon@ime.unicamp.br

2 Os Esquemas SSP Runge-Kutta

A procura por esquemas de evolução temporal da equação (2), que produzam bons resultados, pode ser uma tarefa não-trivial. Neste trabalho estudamos a aplicação dos esquemas SSP (do inglês, strong stability-preserving) Runge-Kutta que permitem utilizar o aumento do número de estágios tanto para aumentar a estabilidade (mantendo a ordem no tempo) quanto para aumentar a ordem do esquema [4,5]. A forma geral de um esquema SSP Runge-Kutta de m estágios para (2) é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{(0)} &= \mathcal{S}^{n}, \\ \mathcal{S}^{(i)} &= \sum_{k=0}^{i-1} \left(\alpha_{i,k}\mathcal{S}^{(k)} + \tau\beta_{i,k}\mathcal{F}\left(\mathcal{S}^{(k)}\right)\right), \quad \alpha_{i,k} \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m, \\ \mathcal{S}^{n+1} &= \mathcal{S}^{(m)} \end{aligned} \tag{3}$$

onde os coeficientes $\alpha_{i,k}$ e $\beta_{i,k}$ são sujeitos a restrições não-lineares de forma a garantir as propriedades de estabilidade [4], e o passo de tempo τ escolhido satisfazendo uma condição do tipo CFL. Serão apresentados diversos experimentos numéricos de forma a estudar a estabilidade e a precisão de tais esquemas, quando aplicados a formulações semidiscretas oriundas da discretização de problemas relativos a escoamentos em meios porosos [2,3].

Referências

[1] B. Cockburn and C. Shu, The Runge-Kutta Discontinuous Galerkin method for conservation laws V: multidimensional systems, *Journal of Computational Physics*, 141:199-224, 1998. DOI: 10.1006/jcph.1998.5892.

[2] M. R. Correa. A Semi-Discrete Central Scheme for Incompressible Multiphase Flow in Porous Media in Several Space Dimensions, *Mathematics and Computers in Simulation*, 140:24–52, 2017. DOI: 10.1016/j.matcom.2017.01.008

[3] M. R. Correa and M. A. Murad. A new sequential method for three-phase immiscible flow in poroelastic media, *Journal of Computational Physics*, 373:493–532, 2018. DOI: 10.1016/j.jcp.2018.06.069

[4] S. Gottlieb, C. Shu and E. Tadmor. Strong Stability-Preserving High-Order Time Discretization Methods, *SIAM Review*, 43:89-112, 2001. DOI:10.1137/S003614450036757X

[5] E. J. Kubatko, J. J. Westerink and C. Dawson. Semi discrete discontinuous Galerkin methods and stage-exceeding-order, strong-stability-preserving Runge–Kutta time discretizations, *Journal of Computational Physics*, 222:832-840, 2007. DOI: 10.1016/j.jcp.2006.08.005

[6] A. Kurganov, S. Noelle and G. Petrova. Semidiscrete Central-Upwind Schemes for Hyperbolic Conservation Laws and Hamilton-Jacobi Equations, *SIAM J. Sci. Comput.*, 23:707-740, 2001. DOI: 10.1137/S1064827500373413

