Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 7, n. 1, 2020.

Trabalho apresentado no XXXIX CNMAC, Uberlândia - MG, 2019.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Aproximação de um problema Elíptico pelo Método de Galerkin com diferentes espaços em Quadriláteros Convexos

Giovanni Taraschi [1]
Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, IMECC, Unicamp
Maicon R. Correa [2]
Departamento de Matemática Aplicada, IMECC, Unicamp

1 Introdução

Nesse trabalho estudamos a aproximação de problemas elípticos pelo Método dos Elementos Finitos (MEF) em malhas compostas por elementos quadrilaterais convexos. Em particular estudamos as condições sobre os espaços de busca e sobre as malhas adotadas para a obtenção das taxas de convergência ótimas para a solução e para seu gradiente. Para isso foi adotado o seguinte problema de valor de contorno

$$-\Delta u = f \text{ em } \Omega, \quad u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \tag{1}$$

Reescrevendo (1) em sua forma variacional, buscamos $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega = \int_\Omega f \, v \, d\Omega \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{2}$$

Por fim, o MEF baseado no método de Galerkin consiste em determinar $u_h \in V_h$, solução do problema variacional

$$\int_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, d\Omega = \int_\Omega f \, v_h \, d\Omega \quad \forall v_h \in V_h, \tag{3}$$

onde V_h é uma aproximação de dimensão finita de $H_0^1(\Omega)$ gerada a partir de uma discretização do domínio Ω.

Seja $\mathcal{T}_h$ uma discretização de Ω em elementos quadrilaterais E. Neste trabalho estudamos aproximações baseadas em elementos E gerados a partir de uma transformação bilinear sobre um elemento padrão $\hat{E}$, dada por

$$F_E(\hat{x}) = \sum_{i=1}^{4} \hat{l}_i(\hat{x}) x_{E,i}, \tag{4}$$

[1] gitaraschi@gmail.com
[2] maicon@ime.unicamp.br

© 2020 SBMAC

onde $\hat{x}_i$ denota a coordenada do i-ésimo vértice do elemento $\hat{E}$, $x_{E,i}$ é a coordenada do i-ésimo vértice do elemento geométrico (ou real) E e $\hat{l}_i(\hat{x})$ são as respectivas funções de forma de Lagrange, definidas sobre $\hat{E}$. A partir de tais definições, podemos construir os seguintes espaços de Elementos Finitos:

1. Espaços dos polinômios por partes de grau parcial igual ou menor a r:

$$\mathcal{Q}_h^r = \{v \in \mathcal{C}^0(\Omega);\ v|_E \in F_E(\mathcal{Q}_r(\hat{E}))\ , \forall E \in \mathcal{T}_h\},$$

   onde $\mathcal{Q}_r(\hat{E}) = \text{span}\{\hat{x}^i\hat{y}^j : i, j \leq r\}$.

2. Espaços Serendipity:

$$\mathcal{S}_h^r = \{v \in \mathcal{C}^0(\Omega);\ v|_E \in F_E(\mathcal{Q}_r'(\hat{E}))\ , \forall E \in \mathcal{T}_h\},$$

   onde $\mathcal{Q}_r'(\hat{E}) = \text{span}\{\hat{x}^i\hat{y}^j, \hat{x}^r\hat{y}, \hat{x}\hat{y}^r : i + j \leq r\}$.

Para soluções suficientemente regulares, a taxa de convergência do método está associada principalmente ao espaço de busca V_h. Para o caso de problemas com discretização em quadriláteros, a discretização adotada pode interferir nas taxas de convergência. O artigo [1] apresenta condições necessárias e suficientes para obtenção das taxas ótimas em malhas quadrilaterais afins e não-afins.

2 Experimentos Numéricos

Foi desenvolvido um código que resolve o problema (1) utilizando o método (3) baseado tanto em espaços $\mathcal{Q}_h^r$ quanto em espaços do tipo Serendipity $\mathcal{S}_h^r$. A partir deste código, foram realizados estudos de convergência sobre três tipos de malhas, conforme proposto em [1]: Afins, não-afins e assintoticamente afins. Esses estudos foram divididos em dois blocos.

O primeiro bloco buscou reproduzir os experimentos de [1]. Os resultados encontrados são equivalentes aos dos artigo original, a menos de pequenas diferenças devido a aritmética de ponto flutuante, e comprovam a teoria desenvolvida no artigo, indicando a não-otimalidade da convergência dos elementos Serendipity em malhas não-afins. Já no segundo bloco foram implementadas aproximações baseadas em elementos do tipo Serendipity de terceira ordem e em elementos do tipo $\mathcal{Q}_3$ obtendo novos resultados, que vão além dos apresentados no artigo original. Como esperado os elementos do tipo Serendipity alcançam ordem de convergência ótima em malhas afins e assintoticamente afins e taxas sub-ótimas em malhas não-afins. Já os elementos do tipo $\mathcal{Q}_3$ alcançam taxas ótimas nos três tipos de malhas.Dessa forma, os novos resultados obtidos novamente concordam com a análise feita em [1] e fortalecem a validação experimental da mesma.

Referências

[1] D. Arnold, D. Boffi, and R. Falk. Approximation by quadrilateral finite elements. *Mathematics of computation*, 71(239):909–922, 2002.

© 2020 SBMAC