Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 7, n. 1, 2020.

Trabalho apresentado no XXXIX CNMAC, Uberlândia - MG, 2019.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Detecção de Bordas e Suavização de Imagens Digitais via Métodos Variacionais

Italo Messias Felix Santos [1] Abimael Dourado Loula [2] Gilson Antonio Giraldi [3]
Laboratório Nacional de Computação Ciêntifica (LNCC)
Gastão Florêncio Miranda Junior [4]
Universidade Federal de Sergipe (UFS)

1 Introdução

Este trabalho tem como objetivo detecção de bordas e suavização de imagens digitais. Para este fim, seguimos o esquema sugerido pelo artigo [1] partindo do modelo de Mumford e Shah [2] o qual é reduzido a uma expressão mais simples e elegante usando artifícios de Γ-convergência. Uma aproximação para a nova expressão pode ser obtida por um esquema iterativo totalmente linear o que possibilita a utilização do método dos elementos finitos garantindo consistência e estabilidade. O custo computacional pode ser reduzido usando malhas não estruturadas com nós determinados por um filtro do tipo passa-alta.

2 Desenvolvimento do método

A premissa é determinar $u_{min} \in H^1(\Omega) = \left\{ f \in L^2(\Omega); \frac{\partial f}{\partial x} \in L^2(\Omega) \text{ e } \frac{\partial f}{\partial x} \in L^2(\Omega) \right\}$, onde Ω é o domínio da imagem, que minimiza o funcional $E(u)$ proposto por Mumford e Shah [1]. Para isto, é definindo um novo funcional $E_c(u,v)$ onde $E_c \to E$ quando $c \to 0$ de tal forma que as sequências minimizantes u_c, v_c de E_c convirjam para (u_{min}, v_{min}).

Consideramos u e v restritos a um espaço de dimensão finita $V(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ gerado por uma base linear por partes com N elementos. Desta forma, queremos determinar $(u,v) \in V(\Omega) \times V(\Omega) = V(\Omega)^2$ que minimiza o funcional:

$$\int_\Omega \left\{ \beta(u-g_c)^2 + (v^2+k_c)\|\nabla u\|^2 + \frac{2\alpha}{\pi}\left(c\|\nabla v\|^2 + \frac{(1-v)^2}{4c} \right) \right\} d\Omega, \tag{1}$$

onde c é um número pequeno, $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ são parâmetros, $k_c << \alpha$ controla o grau de suavização e $g_c \to g \in H^1(\Omega)$ quando $c \to 0$. No contexto de processamento de imagens g, u e v representam a imagem original, a imagem suavizada e as bordas respectivamente.

[1] italof@lncc.br
[2] aloc@lncc.br
[3] gilson@lncc.br
[4] gastao@mat.ufs.br

Utilizando a diferencial de Gateaux chegamos ao seguinte esquema iterativo:

$$\begin{cases} u_n \in V; \displaystyle\int_\Omega \{\beta(u_n - g_c)\hat{u} + (v_{n-1}^2 + k_c)\nabla u_n \cdot \nabla \hat{u}\} d\Omega & = \; 0, \; \forall \hat{u} \in V(\Omega) \\ v_n \in V; \displaystyle\int_\Omega \left\{ \|u_n\|^2 v_n \hat{v} + \frac{\alpha}{\pi}\left(2c\nabla v_n \cdot \nabla \hat{v} - \frac{(1-v_n)\hat{v}}{2c}\right)\right\} d\Omega & = \; 0, \; \forall \hat{v} \in V(\Omega) \end{cases} \tag{2}$$

o qual tem a propriedade $u_n \to u_{min}$ e $v_n \to v_{min}$ quando $n \to \infty$. Observe que precisamos fornecer condições iniciais u_0 e v_0 para o esquema acima.

O algoritmo foi implementado em Python3 e para reduzir o tempo computacional de cada iteração, utilizamos malhas não estruturadas geradas com a triangulação de Delaunay a partir de um conjunto de pontos obtidos pelo filtro de *Canny.* A malha adaptada junto ao método dos elementos finitos permite dar ênfase maior em regiões onde existe maior variação de intensidade de pixel. A Figure 1 mostra um experimento efetuado onde g representa a imagem ilustrada na Figura 1.(a). As Figuras 1.(b)-(c) representam as imagens obtidas das funções u e v, as quais foram resultantes das equações (2).

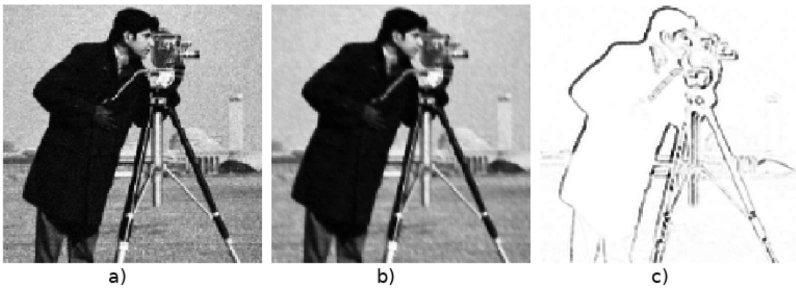

Figura 1: (a) Imagem original. (b) Versão suavizada. (c) Bordas extraídas

Agradecimentos

Agradecimentos a CAPES pelo apoio financeiro permitindo que este trabalho seja desenvolvido.

Referências

[1] B. Blaise. Image segmentation with a finite element method. *M2AN*, Vol. 33, Nº 2, 229–244, 1999.

[2] D. Mumford and J. Shah. Optimal approximation by piecewise smooth functions and associated variational problems. *Comm. Pure Appl. Math.* XLII 577–685, 1989.

