Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 7, n. 1, 2020.

Trabalho apresentado no XXXIX CNMAC, Uberlândia - MG, 2019.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

O modelo de filas $M/M/1$ com catástrofes fracionário e a estimação dos seus parâmetros

Matheus de Oliveira Souza [1]
ICMC - Universidade de São Paulo
Pablo Martin Rodriguez [2]
CCEN - Universidade Federal de Pernambuco

1 Introdução

O modelo de filas $M/M/1$ é um processo Markoviano bem simples e eficaz para a descrição de problemas aplicados. O processo é uma cadeia de nascimento e morte com taxas de nascimento dadas por $\lambda_n = \lambda > 0$, para $n \geq 0$, e taxas de morte $\mu_n = \mu > 0$, para $n \geq 1$. Assim definido o modelo serve de base para a formulação de modelos mais gerais, ver por exemplo [5, Capítulo 8]. De fato, para trabalhar com problemas mais sofisticados se faz necessário formular modelos mais complexos, como os propostos por exemplo em [1,2,4] e em suas referências. O propósito deste trabalho é estudar o modelo de filas $M/M/1$ com catástrofes fracionário, usando uma abordagem diferente à considerada em [1].

No que segue seja X_t o número de pessoas em dado sistema no tempo t, $t \geq 0$. O modelo de filas $M/M/1$ com catástrofes é a cadeia de *Markov* a tempo contínuo $\{X_t\}_{t\geq 0}$ que descreve a seguinte dinâmica: a entrada de clientes no sistema é dada por um processo de *Poisson* com parâmetro λ e os tempos de atendimento são definidos por cópias independentes de uma distribuição exponencial com parâmetro μ, onde $\mu > 0$ *e* $\lambda > 0$; ainda, o número de pessoas pode ir para 0, independente de quantas pessoas há na fila, segundo os instantes de um processo de *Poisson* com parâmetro ξ, com $\xi > 0$. Para mais detalhes sobre este modelo ver [4]. Neste trabalho iremos estudar a versão fracionária deste processo, a qual será denotada por $\{X_t^\alpha\}_{t\geq 0}$ e está definida, por exemplo, em [1].

2 Resultados

Um valor de interesse é o número médio de pessoas no sistema para o novo modelo considerado, ou seja, a esperança de X_t^α. Após definir o modelo e estudar propriedades básicas, adaptamos argumentos de [2] para encontrar uma expressão para $\mathbb{E}[X_t^\alpha]$. Para isto, nos valeremos da função generalizada de *Mittag-Leffler* de 3 parâmetros dada por

[1] matheus.oliveira.souza@usp.br
[2] pablo@de.ufpe.br

$$E^{\delta}_{\beta,\gamma}(w) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{w^r \Gamma(\delta + r)}{r!\Gamma(\beta r + \gamma)\Gamma(\delta)}, \qquad w, \gamma, \delta, \beta \in \mathbb{C}, \Re(\beta) > 0.$$

Outro assunto de interesse nesse modelo é, visando uma futura aplicação estatística, a sua estimação de parâmetros. Para isso, nos baseamos nos argumentos de [2, 3] e propusemos um resultado assintótico para o parâmetro relacionado às catástrofes ξ.

Teorema 1. *Considere o processo de filas M/M/1 com catástrofes fracionário* $\{X_t^{\alpha}\}_{t\geq 0}$. *Seja* n *o número total de transições observadas do processo,* n_c *o número de catástrofes que ocorreram nestas observações e* $\theta := \lambda + \mu + \xi$. *Se* $\hat{p_3} := n_c/n$ *e* $p_3 := \xi/\theta$, *então*

$$\sqrt{n}(\hat{\xi} - \xi) \sim N\left(\, 0,\ \theta^2 p_3(1 - p_3) + p_3^2 \sigma_\theta^2\right) \tag{1}$$

com $n \to \infty$, *onde* $N\left(u, v^2\right)$ *denota uma distribuição normal de média* u *e variância* v^2,

$$\sigma_\theta^2 := \frac{\theta^2 \left\{20\pi^4(2 - \alpha^2) - 3\pi^2(\alpha^4 - 20\alpha^2 - 32)(ln(\theta))^2 - 720\alpha^3(ln(\theta))\zeta(3)\right\}}{120\pi^2} \tag{2}$$

é definido em [3] e $\zeta(3)$ *é a função Riemann-zeta avaliada em* 3.

3 Conclusão

Estudamos o modelo de filas M/M/1 com catástrofes fracionário, encontramos a média do número de clientes a cada instante de tempo e estimamos os parâmetros de interesse $\hat{\lambda}$, $\hat{\mu}$ e $\hat{\xi}$.

Agradecimentos

Este trabalho é parte de um estágio de Iniciação Científica de Matheus de Oliveira Souza com bolsa do CNPq. Ambos autores agradecem ao CNPq pelo apoio financeiro.

Referências

[1] G. Ascione, N. Leonenko and E. Pirozzi. Fractional Queues with Catastrophes and Their Transient Behaviour, *Mathematics*, 6:159, 2018.

[2] D. O. Cahoy, F. Polito and V. V. Phoha. Transient behavior of fractional queues and related processes, *Methodol. Comput. Appl. Probab.*, 17(3):739-759, 2015.

[3] D. O. Cahoy, V. V. Uchaikin, W. A. Woyczynski. Parameter estimation for fractional Poisson processes. *J. Statist. Plann. Inference*, 140(11):3106-3120, 2010.

[4] A. Di Crescenzo, V. Giorno and A. Nobile. On the M/M/1 Queue with Catastrophes and Its Continuous Approximation, *Queueing Syst.*, 43:329, 2003.

[5] S. M. Ross. *Introduction to Probability Models*, 10th Ed., Academic Press, 2010.