Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 7, n. 1, 2020.

Trabalho apresentado no XXXIX CNMAC, Uberlândia - MG, 2019.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Região de Voronoi de Reticulados na Métrica ℓ_p

Eleonesio Strey [1]
Departamento de Matemática Pura e Aplicada, UFES, Alegre, ES
Sueli I. R. Costa[2]
Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, Unicamp, Campinas, SP

1 Introdução

Um *reticulado* Λ é um subgrupo aditivo discreto de $\mathbb{R}^n$. Equivalentemente, $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^n$ é um reticulado se, e somente se, existem vetores linearmente independentes $\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_k \in \mathbb{R}^n$ tais que $\Lambda = \{\alpha_1 \boldsymbol{b}_1 + \cdots + \alpha_m \boldsymbol{b}_k;\ \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{Z}\}$. Reticulados vêm sendo utilizados na área de comunicações em códigos corretores de erros para a transmissão de dados (ver referências [1, 3]). Na descrição acima, o conjunto $\{\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_m\}$ é dito uma *base* de Λ e o número k é denominado o *posto* de Λ. Se $n = k$ dizemos que Λ possui *posto completo*. A matriz B cujas linhas são os vetores $\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_m$ é chamada de *matriz geradora* de Λ. Se B é uma matriz geradora de um reticulado, então o denotamos por $\Lambda(B)$. O subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ gerado pelas linhas da matriz B é denotado por $\text{span}(B)$, isto é, $\text{span}(B) = \{\boldsymbol{u}B;\ \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n\}$. Uma *região fundamental* F de um reticulado $\Lambda = \Lambda(B) \subseteq \mathbb{R}^n$ de posto k é qualquer subconjunto de $\text{span}(B)$ que ladrilha $\text{span}(B)$ por translações $\boldsymbol{v} + F$ com $\boldsymbol{v} \in \Lambda$, isto é, $\text{span}(B) = \bigcup_{\boldsymbol{v} \in \Lambda} \big(\boldsymbol{v} + F\big)$ e dois ladrilhos $\boldsymbol{v}_1 + F$ e $\boldsymbol{v}_2 + F$, com $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \Lambda$ e $\boldsymbol{v}_1 \neq \boldsymbol{v}_2$, ou não se interceptam ou se interceptam apenas nos bordos. Na próxima seção, apresentamos a região de Voronoi, considerando a métrica ℓ_p, de um reticulado Λ e mostramos que, ao contrário do que ocorre na métrica ℓ_2, a região de Voronoi nem sempre é uma região fundamental de Λ. A *norma* ℓ_p de um vetor $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ é definida como $\|\boldsymbol{x}\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p}$, se $1 \leq p < \infty$, e $\|\boldsymbol{x}\|_p = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$, se $p = \infty$. A métrica induzida pela norma ℓ_p é chamada de *métrica* ℓ_p.

2 Região de Voronoi na Métrica ℓ_p

Dado um elemento $\boldsymbol{v}$ de um reticulado $\Lambda = \Lambda(B) \subseteq \mathbb{R}^n$, a **região de Voronoi** de $\boldsymbol{v}$, na métrica ℓ_p, é definida como

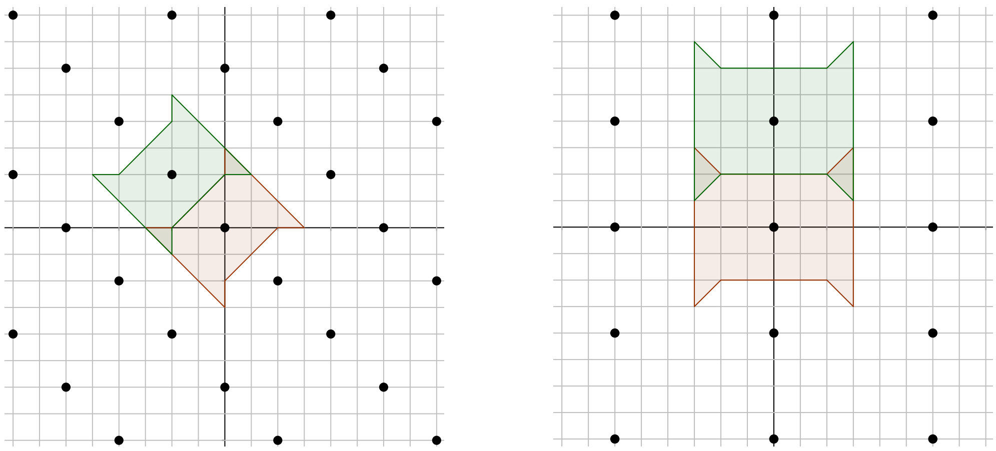
$$\mathcal{R}_p(\boldsymbol{v}) = \{\boldsymbol{x} \in \text{span}(B);\ \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{v}\|_p \leq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{u}\|_p,\ \text{para todo } \boldsymbol{u} \in \Lambda\}.$$

Em outras palavras, $\mathcal{R}_p(\boldsymbol{v})$ consiste de todos os pontos do espaço $\text{span}(B)$ que estão mais próximos, ou a mesma distância, de $\boldsymbol{v}$ do que de qualquer outro ponto de Λ (considerando

[1] eleonesio.strey@ufes.br
[2] sueli@ime.unicamp.br

a métrica ℓ_p). Para cada $\boldsymbol{v} \in \Lambda$, temos que $\mathcal{R}_p(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} + \mathcal{R}_p(\mathbf{0})$. Isto nos permite definir a *região de Voronoi de* Λ *na métrica* ℓ_p, que será denotada por $\mathcal{R}_p(\boldsymbol{\Lambda})$, como sendo $\mathcal{R}_p(\mathbf{0})$. Existem vários resultados na literatura sobre a região de Voronoi de reticulados na métrica ℓ_2 (métrica euclidiana). Porém, resultados considerando outras métricas são escassos. É conhecido que, para qualquer reticulado Λ, $\mathcal{R}_2(\boldsymbol{\Lambda})$ é uma região fundamental de Λ. No entanto, isto nem sempre vale para regiões de Voronoi nas métricas ℓ_1 e ℓ_∞, conforme podemos conferir no exemplo a seguir.

Exemplo 1. *[2] Sejam $\Lambda_\alpha, \Lambda_\beta \subseteq \mathbb{R}^2$ os reticulados gerados pelas bases $\alpha = \{(3,0),(-1,1)\}$ e $\beta = \{(3,0),(0,2)\}$, respectivamente. Nas Figuras 1(a)e 1(b) estão representadas as regiões de Voronoi $\mathcal{R}_1(\Lambda_\alpha)$ e $\mathcal{R}_\infty(\Lambda_\beta)$, respectivamente. Observe que $\mathcal{R}_1(\Lambda_\alpha)$ e $\mathcal{R}_\infty(\Lambda_\beta)$ não são regiões fundamentais de Λ_α e Λ_β, já que os ladrilhos ilustrados em cada caso não são disjuntos e não se interceptam apenas nos bordos.*



(a) $\mathcal{R}_1(\Lambda_\alpha)$ (b) $\mathcal{R}_\infty(\Lambda_\beta)$

Figura 1: Região de Voronoi

Conjectura 1. *Seja $1 < p < \infty$. Para qualquer reticulado Λ, $\mathcal{R}_p(\Lambda)$ é uma região fundamental de Λ.*

Referências

[1] J. H. Conway and N. J. A. Sloane. *Sphere Packings, Lattices and Groups, 3rd edn.* Springer, New York, 1998.

[2] E. Strey. Construções de reticulados a partir de códigos q-ários. Tese de Doutorado, Imecc-Unicamp, 2017.

[3] R. Zamir, Lattices are everywhere. *Information Theory and Applications Workshop*, San Diego, CA, pages 392-421, 2009.

