

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

A escolha do parâmetro τ na dimensão da nova modelagem fracionária

Lucas Kenjy Bazaglia Kuroda¹

UNESP - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Botucatu, SP

Rubens de Figueiredo Camargo²

UNESP - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Ciência, Bauru, SP

Neste trabalho realizaremos a nova modelagem fracionária³ que consiste em inserir um novo parâmetro na correção da dimensão em modelos de ordem não inteira. Ao resolver uma edo, por exemplo, $\frac{dS(t)}{dt} = f(t)$, supõe-se que ambos os lados da equação tenham a mesma dimensão, isto é, $\frac{1}{tempo} = \frac{1}{s}$. Para considerar a versão fracionária, troca-se $\frac{d}{dt} \rightarrow \frac{d^\beta}{dt^\beta}$, se a função $f(t)$ for exatamente a mesma, é conveniente que o operador do lado esquerdo siga tendo dimensão s^{-1} . Uma forma de garantir que ambos os lados da igualdade tenham a mesma dimensão, [1] introduziu um novo parâmetro τ , para $n - 1 < \beta \leq n$, com $n \in \mathbb{N}$, da seguinte maneira,

$$\frac{d^n}{dt^n} \rightarrow \frac{1}{\tau^{n-\beta}} \frac{d^\beta}{dt^\beta}. \quad (1)$$

Desta forma (1), é dimensionalmente consistente, se e somente se, o novo parâmetro τ , tem dimensão de tempo $[\tau] = s$. Assim, $\left[\frac{1}{\tau^{n-\beta}} \frac{d^\beta}{dt^\beta} \right]$ passa a ser uma derivada no tempo no sentido usual, cuja dimensão é s^{-n} .

O desafio passa ser em encontrar o valor do parâmetro τ . No entanto, esse novo parâmetro na modelagem fracionária nos abre novos horizontes sobre diferentes modelagens sem erros dimensional se tratando do mesmo modelo. Apesar de ser mais um parâmetro introduzido, podemos descrever diversas soluções e aproximar essas curvas ao dados reais.

A Tabela 1 contém os modelos de Malthus (M), oscilador harmônico (OH) e o modelo logístico (L), juntamente com o valor de τ em cada equação e sua respectiva modelagem para o valor do parâmetro escolhido. Encontra-se também alguns trabalhos em que o valor do parâmetro foi utilizado, mesmo que implicitamente⁴.

¹lucaskuroda@ibb.unesp.br

²rubens@fc.unesp.br

³Segundo Caputo.

⁴Modelagem utilizada sem citar o valor do parâmetro τ .

Tabela 1: Modelagem para diferentes valores de τ .

Modelo	Equação	τ	Modelagem	Referência
M	$\frac{1}{\tau^{1-\beta}} [{}_C D^\beta N(t)] = rN(t)$	$\tau = \frac{1}{r}$	${}_C D^\beta N(t) = r^\beta N(t)$	[4]
OH	$\frac{1}{\tau^{2-\beta}} [{}_C D^\beta x(t)] = -\omega^2 x(t)$	$\tau = \frac{\beta}{\omega}$	${}_C D^{2\beta} x(t) = -\beta^{2(1-\beta)} \omega^{2\beta} x(t)$	[1]
OH	$\frac{1}{\tau^{2-\beta}} [{}_C D^\beta x(t)] = -\omega^2 x(t)$	$\tau = \frac{1}{\omega}$	${}_C D^\beta x(t) = -\omega^\beta x(t)$	[3]
L	$\frac{1}{\tau^{1-\beta}} [{}_C D^\beta N(t)] = rN(t)[1 - N(t)]$	$\tau = \frac{1}{r}$	${}_C D^\beta N(t) = r^\beta N(t)[1 - N(t)]$	[2]

Conclusões

A inserção do novo parâmetro τ , imposta para a correção dimensional, nos traz desafios e um novo horizonte para a modelagem fracionária. Apesar de ser mais um parâmetro introduzido no modelo, essa nova modelagem nos traz uma variação maior nas curvas de soluções quando queremos aproximá-las aos dados reais. Nos casos mais simples vimos que podemos escolher τ de tal forma que a solução dependa apenas do valor da derivada fracionária, em outros casos, podemos utilizar métodos computacionais e estipular o valor deste parâmetro de maneira conveniente.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, Processo: 33004064083P2. Agradecemos também o grupo de pesquisa CF@FC.

Referências

- [1] J. F. Gómez-Aguilar, J. J. Rosales-Garcia, J. J. Bernal-Arvarado, T. Córdova-Fraga and R. Guzmán-Cabrera. Fractional mechanical oscillators. *Revista Mex. Fis.*, v. 58, n. 9, p. 348-352, 2012.
- [2] M. Ortigueira, and G. Bengochea. A new look at the fractionalization of the logistic equation. *Physica A.*, v. 467, p. 554-561, 2017.
- [3] F. G. Rodrigues, and E. C. Oliveira. Introdução às técnicas do cálculo fracionário para estudar modelos da física matemática. *Revista Brasileira de Ens. de Fís.*, v. 37, n. 3, p. 1-12, 2015.
- [4] B. J. West. Exact solution to fractional logistic equation. *Physica A.*, v. 429, p. 103-108, 2015.