

**Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**

## Vantagens da Expansão em Polinômio de Caos na Propagação de Incertezas em Sistemas Mecânicos

Bruna Silveira Pavlack<sup>1</sup>

Instituto Federal de Mato Grosso do Sul, Câmpus Três Lagoas

Luis G. G. Villani<sup>2</sup>

Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual Paulista, Câmpus Ilha Solteira

Samuel da Silva<sup>3</sup>

Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual Paulista, Câmpus Ilha Solteira

Americo Cunha Jr<sup>4</sup>

Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro

### 1 Introdução

O método de Monte Carlo (MC) é bastante utilizado na obtenção de meta-modelos para propagação de incertezas em sistemas mecânicos, porém tem convergência lenta e custo computacional alto. A Expansão em Polinômio de Caos (PCE) tem enormes vantagens com relação ao método de MC na propagação de incertezas [2] sendo a principal delas a possibilidade de convergência com poucas amostras. Este artigo é uma primeira tentativa dos autores de melhorar o processo descrito em [3] adaptando o meta-modelo com PCE no lugar de MC. Aqui um oscilador de Duffing é simulado assumindo que a rigidez linear é uma variável aleatória e comparando a propagação da incerteza com MC e PCE.

### 2 Expansão em Polinômio de Caos

Segundo [1], considere um vetor aleatório com componentes independentes  $X \in \mathbb{R}^M$  descrito por uma função densidade de probabilidade  $f_x$ . Considere também um modelo computacional de variância finita,  $Y = \mathcal{M}(x)$ , com  $Y \in \mathbb{R}$ . A Expansão em Polinômio de Caos é definida como  $Y(t) \approx \sum_{\alpha=0}^p y_{\alpha}(t) \psi_{\alpha}(X)$ , sendo  $\psi_{\alpha}(X)$  os polinômios ortonormais em relação a  $f_x$ ,  $\alpha \in \mathbb{N}^M$  é um índice dos componentes do polinômio  $\psi_{\alpha}$  e  $y_{\alpha}(t) \in \mathbb{R}$  são os coeficientes. Considerando  $M$  amostras, os coeficientes podem ser obtidos resolvendo

$$\begin{bmatrix} \psi_0(X_1) & \psi_1(X_1) & \cdots & \psi_p(X_1) \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_0(X_M) & \psi_1(X_M) & \cdots & \psi_p(X_M) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} Y_1(t) \\ \vdots \\ Y_M(t) \end{Bmatrix} \Leftrightarrow [\Psi] \mathbf{y} \approx \mathbf{Y}, \quad (1)$$

via regressão pelo Método dos Mínimos Quadrados. Para melhorar a convergência, utiliza-se uma família de polinômio adequado para cada tipo de distribuição de probabilidade assumida para um parâmetro, por exemplo, polinômio de Laguerre para distribuição Gama.

<sup>1</sup>bruna.pavlack@ifms.edu.br

<sup>2</sup>luis.villani@unesp.br

<sup>3</sup>samuel.silva13@unesp.br

<sup>4</sup>americo@ime.uerj.br

### 3 Exemplo de aplicação numérica

Na realização das simulações analisou-se a resposta livre  $x(t)$  de um oscilador de Duffing. Os parâmetros do modelo estocástico foram estimados de acordo com a metodologia utilizada em [4]. Tem-se: massa  $m = 0,233$  kg, coeficiente de amortecimento  $c = 1,226$  Ns/m, rigidez quadrática  $K_2 = -3,087 \times 10^4$  N/m<sup>2</sup>, rigidez cúbica  $K_3 = 3,986 \times 10^7$  N/m<sup>3</sup>. A rigidez linear é uma variável aleatória com média  $\mu_K = 4,954 \times 10^3$  N/m e desvio padrão  $\sigma_K = 2,21\%$ . As condições iniciais são  $x(t) = 0$  e  $\dot{x}(t) = 0$  e um forçamento senoidal com amplitude  $A = 0,1$  m e frequência natural  $\omega_n = 23,257$  Hz. As amostras de rigidez linear foram geradas utilizando a distribuição Gamma. Foram necessárias 8 amostras no PCE para gerar os mesmos resultados do MC com 1024 amostras. A Figura 1 apresenta uma comparação entre média e envelope probabilístico do deslocamento  $x(t)$  obtidos com os dois métodos.

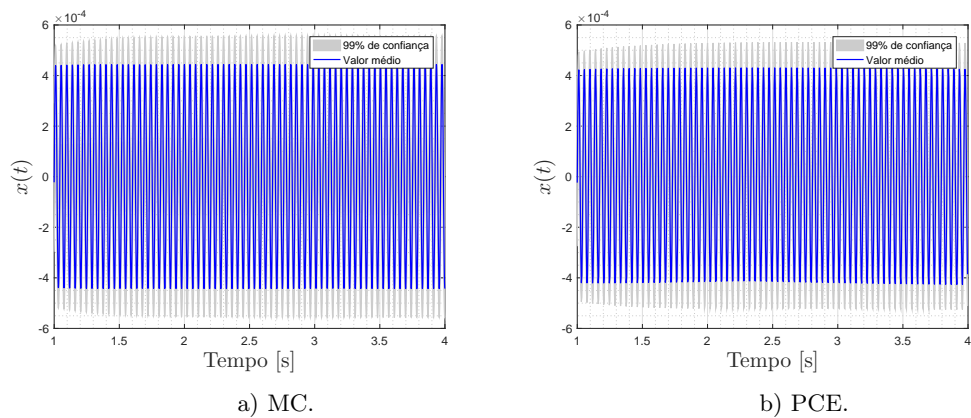


Figura 1: Média (azul) e envelope de confiabilidade (cinza) para o deslocamento  $x(t)$  de um oscilador de Duffing com rigidez aleatória e forçamento senoidal.

### Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio da FAPESP ao processo 2017/15512-8 e da FAPERJ aos processos E-26/010.002.178/2015 e E-26/010.000.805/2018.

### Referências

- [1] S. Marelli, B.Sudret. UQLAB user manual - Polynomial chaos expansions. Report UQLAB-V1.2-104, chair of Risk, Safety & Uncertainty Quantification, ETH Zurich, 2019, <https://www.uqlab.com/pce-user-manual>.
- [2] C. Soize. *Uncertainty Quantification: An Accelerated Course with Advanced Applications in Computational Engineering*. Springer, 2017.
- [3] Luis G.G. Villani, Samuel da Silva, Americo Cunha Jr. Damage detection in uncertain nonlinear systems based on stochastic Volterra series, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2018, <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2018.07.028>.
- [4] Luis G.G. Villani, Samuel da Silva, Americo Cunha Jr. Application of a stochastic version of the restoring force surface method to identify a Duffing oscillator. In: First International Nonlinear Dynamics Conference (NODYCON 2019), 2019, Roma, Italy. NODYCON 2019, 2019. v. 1. p. 335-336.