Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 7, n. 1, 2020.

Trabalho apresentado no XXXIX CNMAC, Uberlândia - MG, 2019.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Solução Numérica de Equações Diferenciais Parciais via Rede Neural de Laguerre

Heybsson Raiol dos Santos [1]
Universidade Federal do Pará, Belém, Pará
Valcir João da Cunha Farias [2]
Universidade Federal do Pará, Belém, Pará
Fernando Augusto Bessa Campos [3]
Programa de Pós graduação em Matemática e Estatística, UFPA, Belém, PA
Carmem Lúcia Brito Souza de Almeida [4]
Universidade Federal do Pará, Belém, Pará

1 Introdução

Neste trabalho, adaptamos a Rede Neural de Legendre para a solução de equações diferenciais ordinárias [1] para a solução numérica de uma equação diferencial parcial aplicando o polinômio de Laguerre, que chamaremos de Rede Neural de Laguerre (RNL). A Rede Neural de Laguerre consiste em uma única camada neural e uma expansão do padrão de entrada por polinômios de Laguerre. A equação considerada para mostrar a eficácia do modelo RNL é:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{-x}(x-2+y^3+6y) \qquad x, y \in [0,1] \\ u(x,0) = xe^{-x} \\ u(x,1) = e^{-x}(x+1) \\ u(0,y) = y^3 \\ u(1,y) = (1+y^3)e^{-1} \end{cases} \tag{1}$$

2 Estrutura da Rede Neural de Laguerre

Consideramos um modelo de camada única da RNL para o presente problema. A estrutura da RNL consiste em duas entradas x e y, um bloco funcional de expansão

[1] heybsson10@gmail.com
[2] Valcir@ufpa.br
[3] fernando.camposbessa@gmail.com
[4] clbsf@ufpa.br

baseado em polinômios de Laguerre e uma única saída. A arquitetura do modelo neural consiste em duas partes: o primeiro é parte numérica da transformação e a segunda parte é o aprendizado da rede. Na parte numérica da transformação, cada dado de entrada é expandido para vários termos que utilizam o polinômio de Laguerre, $[L_0(x)L_0(y)$, $L_0(x)L_1(y), ..., L_0(x)L_n(y), L_1(x)L_0(y), L_1(x)L_1(y), ..., L_1(x)L_n(y), ...L_n(x)L_0(y)$, $L_n(x)L_1(y), ..., L_n(x)L_n(y)]$. Assim, o polinômio de Laguerre pode ser visto como um novo vetor de entrada. Vamos considerar os dados de entrada designados por $x = (x_1, x_2, ..., x_h)$ com h elementos, $y = (y_1, y_2, ..., y_m)$ com m elementos e os polinômios de Laguerre, que são um conjunto de polinômios ortogonais obtidos a partir da solução das equações diferenciais de Laguerre. Os dois primeiros polinômios de Laguerre são $L_0(x) = 1$ e $L_1(x) = 1 - x$. Os polinômios de ordem superior de Laguerre podem ser gerados pela fórmula recursiva bem conhecida $L_{n+1}(x) = (2n + 1 - x)L_n(x) - n^2 L_{n-1}(x)$, sendo que $L_n(x)$ indica a ordem do n-ésimo polinômio de Laguerre. Tem-se como vantagem da RNL a obtenção da solução usando rede de camada única, embora isso seja feito aumentando a dimensão da entrada através do polinômio de Laguerre.

3 Resultados

Para o treinamento da rede foram considerados $h = 10$, $m = 10$, cinco polinômios em x, cinco em y e a taxa de aprendizagem foi de 10^{-4}. A Figura 1 mostra a estrutura do modelo da rede e a Figura 2 mostra o erro em relação a solução analítica. Observe que o erro máximo é da ordem de 10^{-2}.

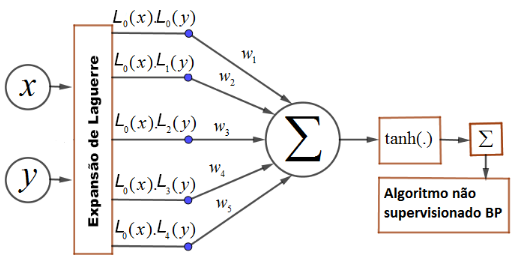

Figura 1: Modelo da Rede Neural de Laguerre

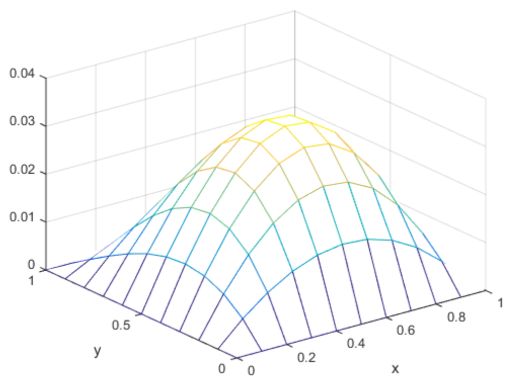

Figura 2: Desvio da RNL em relação a solução exata

Referências

[1] S. Mall and S Chakraverty. Application of Legendre Neural Network for solving ordinary differential equations. *Applied Soft Computing*, 43:347-356, 2016.

