Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 7, n. 1, 2020.

Trabalho apresentado no XXXIX CNMAC, Uberlândia - MG, 2019.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Simetrias e leis de conservação para uma equação do tipo Holm-Staley

Priscila Leal da Silva[1]
Centro de Matemática, Computação e Cognição, Universidade Federal do ABC, Brasil

1 Introdução

No trabalho [1], a família de equações

$$m_t + um_x + bu_x m = 0, \quad b \neq 0, \quad m = u - u_{xx} \tag{1}$$

foi apresentada e algumas de suas propriedades estudadas. A equação (1) é hoje conhecida como *b-equation* ou equação de Holm-Staley. Uma das propriedades interessantes da família (1) é que elas admitem soluções especiais apenas contínuas chamadas *peakons* da forma $u(x,t) = Ae^{-|x-ct|}$, no qual $A = A(b)$. De maneira mais geral, é conhecido que se buscarmos pela classificação e existência de soluções limitadas do tipo onda $u(x,t) = \phi(x-ct)$ de (1), no qual c denota a velocidade da onda, será impossível encontrar soluções ao mesmo tempo contínuas e monótonas (também conhecidas como soluções do tipo *kink*).

Em [2], os autores perceberam que essa ausência de soluções *kink* se dava exatamente pela exclusão da escolha $b = 0$ em (1). Mais explicitamente, eles mostraram que tomando $b = 0$ em (1), levando à equação

$$u_t - u_{txx} - uu_x + uu_{xxx} = 0, \tag{2}$$

é possível construir *kinks* estacionários

$$\text{sign}\ (x-c)(e^{-|x-c|} - 1).$$

Porém, devido à ausência de quadratura para a equação (2), pouco se sabe sobre a existência de outras soluções e até mesmo outras propriedades da equação tais quais simetrias clássicas e leis de conservação, propriedades estas que podem levar ao conhecimento de outras soluções explícitas e até mesmo à determinação de regularidade de soluções.

O objetivo deste trabalho é estudar simetrias, leis de conservação e utilizar este conhecimento para determinar outras soluções e propriedades pertinentes delas.

[1]priscila.silva@ufabc.edu.br

2 Resultados preliminares

Ingenuamente falando, uma simetria de uma equação diferencial é um grupo de transformações que aplica soluções da equação em outra solução. Do ponto de vista operacional, um operador

$$X = \xi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial x} + \tau(x,t,u)\frac{\partial}{\partial t} + \eta(x,t,u)\frac{\partial}{\partial u}$$

é dito ser um gerador de simetria clássica de (2) se a condição de invariância

$$X^{(3)}(u_t - u_{txx} - uu_x + uu_{xxx}) = 0$$

é satisfeita nas soluções de (2). Na condição de invariância, $X^{(3)}$ denota a terceira prolongação do operador X, e sua expressão é dada por

$$X^{(3)} = X + \Phi^x\frac{\partial}{\partial u_x} + \Phi^t\frac{\partial}{\partial u_t} + \Phi^{xxx}\frac{\partial}{\partial u_{xxx}} + \Phi^{txx}\frac{\partial}{\partial u_{txx}},$$

com $\Phi^i = D_i\eta - (D_i\xi)u_x - (D_i\tau)u_t$ e $\Phi^{i_1\dots i_k} = D_{i_k}\Phi^{i_1\dots i_{k-1}} - (D_{i_k}\xi)u_{i_1\dots i_{k-1}x} - (D_{i_k}\tau)u_{i_1\dots i_{k-1}t}$, para $k = 2, 3$. Em termos da equação (2), temos o seguinte resultado:

Theorem 2.1. *Uma base para as simetrias clássicas da equação* (2) *é dada pelos operadores*

$$X = \frac{\partial}{\partial x}, \quad T = \frac{\partial}{\partial t}, \quad D = u\frac{\partial}{\partial u} - t\frac{\partial}{\partial t}, \quad B = t\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial u}.$$

Os operadores apresentados no Teorema 2.1 geram, respectivamente, translações no espaço, translações no tempo, dilatações e *boosts* de Galileu.

Além de obtermos os geradores de simetria, é possível procurar por leis de conservação para a equação (2). Uma vez que, a princípio, teoremas clássicos de leis de conservação como o Teorema de Noether não são aplicáveis a (2), a busca por leis de conservação se torna uma tarefa nada trivial. Porém, é possível encontrar uma lei de conservação para (2).

Theorem 2.2. *O vetor* $C = (C^0, C^1)$*, com*

$$C^0 = u - u_{xx}, \quad C^1 = -\frac{u^2}{2} + uu_{xx} - \frac{u_x^2}{2}$$

é conservado nas soluções da equação (2).

Os próximos passos deste trabalho correspondem à busca de novas leis de conservação e soluções analíticas para a equação (2) obtidas a partir dos resultados obtidos no Teorema (2.1).

Referências

[1] A. Degasperis, D. D. Holm and A. N. W. Hone. A new integrable equation with peakon solutions, *Theor. Math. Phys.*, 133:1463–1474, 2002.

[2] B. Xia and Z. Qiao. The n-kink, bell-shape and hat-shape solitary solutions of b-family equation in the case of b = 0, *Phys. Lett. A*, 377:2340–2342, 2013.