O método de Gauss-Newton uma aplicação em antenas filamentares

Valcir J. da C. Farias   Alessandra L. de Oliveira   Marissol T. Sperotto
Programa de Pós-graduação em Matemática e Estatística-ICEN-UFPA
Rua Augusto Corrêa, 01, Belém, Pará
E-mail: valcir@ufpa.br; alima485@gmail.com; marissol@ufpa.br.

Resumo *– O projeto da antena Yagi-Uda foi otimizado aplicando o método de Gauss-Newton. A otimização consistiu em especificar intervalos de valores para a diretividade, razão frente-costa e ângulo de meia potência e, partindo de um modelo inicial pré-definido, foram determinados os melhores valores para o comprimento e espaçamento dos elementos. Para a modelagem direta, foi utilzado o método dos momemtos sobre a equação integral de Pocklington, a qual consistiu em obter os valore de diretividade, razão frente-costa e ângulo de meia potência a partir do comprimento e do espaçamento entre elementos conhecidos. O procedimento foi aplicado na síntese de antenas Yagi-Uda com cinco elementos e os resultados foram encontrados tão bons quanto os obtidos na literatura aplicando outros métodos de otimização.*

Palavras chaves – Antena Yagi-Uda, método de Gauss-Newton, otimização.

1 INTRODUÇÃO

A antena Yagi-Uda foi introduzida em 1920 por S. Uda [1]. Uma antena Yagi-Uda convencional consiste em dipolos lineares paralelos dos quais somente um, normalmente o segundo elemento, é energizado por uma fonte, os demais são elementos parasitas. O primeiro elemento funciona como refletor, o qual possui tamanho maior que o elemento energizado. Do terceiro até o n-ésimo são elementos diretores e são menores que o elemento fonte. A Figura 1 mostra uma antena Yagi-Uda com seis elementos.

Apesar da aparência simples da antena Yagi-Uda, o projeto desse dispositivo não é uma tarefa fácil, principalmente por que existem muitas inter-relações entre as variáveis envolvidas no projeto, como exemplo, os elementos são eletromagneticamente acoplados e uma pequena variação no comprimento e/ou no espaçamento entre os elementos da antena pode alterar a distribuição de corrente sobre todos os componentes. As dificuldades de projeto fizeram com que a atenção de alguns pesquisadores se voltasse para a otimização da antena Yagi-Uda [2-4].

Cheng [2] usou o método do gradiente para otimizar o ganho e a impedância de entrada da antena Yagi-Uda, seus resultados aumentaram em 80% o ganho de um projeto inicial de um dispositivo Yagi-Uda.

Jones and Joines [3] e Ramos et al. [4] usaram algoritmo genético para o projeto da antena Yagi-Uda, seus resultados foram tão bons quanto os apresentados por [2].

Para problemas de otimização com poucos parâmetros os métodos de busca local, como Newton, Quasi-Newton e Gauss-Newton possuem um bom desempenho. Além disso, essas técnicas são computacionalmente, nestes casos, tão rápidas quanto os métodos de busca global, como o algoritmo genético. Dessa forma, se torna atrativo desenvolver a otimização da antena Yagi-Uda aplicando uma técnica de busca local.

Este trabalho aplica o método de Gauss-Newton para otimizar diretividade, ângulo de meia potência e razão frente-costa da antena Yagi-Uda a partir do ajuste dos valores dos comprimentos e espaçamentos entre elementos desse dispositivo de radiação.

2 MÉTODO DE GAUSS-NEWTON

O objetivo do projeto é desenvolver uma antena Yagi-Uda que reúna algumas características requeridas para um bom desempenho desse dispositivo. As características que serão especificadas neste trabalho são: número de elementos, sendo um refletor e um elemento energizado; diretividade; razão frente-costa; e ângulo de meia. Os valores dos tamanhos e dos espaçamentos entre os elementos serão ajustados pelo processo de otimização de Gauss-Newton.

Um projeto inicial da antena será estabelecido e, a partir desses dados, aplica-se o método de Gauss-Newton até que as faixas de valores das características pré-estabelecidas sejam atingidas.
A qualidade do processo de otimização está relacionada, matematicamente, a uma função Custo.
A função custo utilizada no processo de otimização de Gauss-Newton, neste trabalho, foi a mesma desenvolvida por [5-6], e é dada pela expressão (1).

$$C(m)=\frac{1}{2}\left\{\mu\left[\left\|\overline{\overline{W}}_d.(f(m)-d^{obs})\right\|^2-\chi^2\right]+\left\|\overline{\overline{W}}_m(m-m_r)\right\|^2\right\} \tag{1}$$

Onde μ ($0<\mu<\infty$) é o parâmetro de regularização (multiplicador de Lagrange); χ^2 é um valor pré-estabelecido de ajuste dos dados; m é o vetor contendo os valores que serão ajustados (parâmetros do modelo), que neste trabalho foram os tamanhos e os espaçamentos entre os elementos; $f(m)$ é o operador modelagem direta; d^{obs} é o vetor contendo os valores requeridos para o projeto da antena (diretividade, razão frente-costa e ângulo de meia potência); W_m á inversa da matriz covariância dos dados que serão ajustados; e W_d é a inversa da matriz covariância dos dados pré-estabelecidos para o projeto.

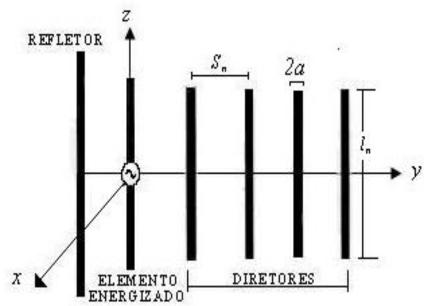

Figura 1: Antena Yagi-Uda com seis elementos.

O problema apresentado aqui é de otimização não-linear que para o qual aplica-se o método iterativo de Newton. Esta técnica é baseada em uma representação quadrática da função custo. O modelo quadrático é obtido tomando-se os três primeiros termos da expansão por série de Taylor da função custo (1) em torno da k-ésima iteração (m_k), assim:

$$C(m_k+\Delta m_k)=C(m_k)+g^T(m_k).\Delta m_k+\frac{1}{2}\Delta m_k{}^T.G(m_k).\Delta m_k \tag{2}$$

onde T denota matriz transposta e $\Delta m_k = m_{k+1}-m_k$ é o incremento do vetor dos parâmetros em direção ao ponto estacionário da função custo $C(m_k)$; $\overline{g}(m)=\nabla C(m)$ é o vetor gradiente da função custo, ou seja:

$$g(m)=\nabla C(m)=\left[g_n\equiv\frac{\partial C}{\partial m_n},\ n=1,2,3,\cdots,N\right]=\mu J^T(m).W_d{}^T\cdot W_d\cdot e(m)+W_x{}^T\cdot W_x\cdot(m-m_r)$$

m_n é a n-ésima componente do vetor dos parâmetros do modelo m; $e(m)=f(m)$-d^{obs} é o vetor erro residual; e $J(m)$ é uma matriz cuja dimensão é $M\times N$ denominada de Jacobiano (ou sensitividade) e é dada por:

$$J(m)=\left[\frac{\partial e_l(m)}{\partial m_n},\quad l=1,2,3,\cdots,M;\quad n=1,2,3,\cdots,N\right]$$

$G(m)=\nabla\nabla C(m)$ é o Hessiano da função custo o qual é uma matriz simétrica de ordem N×N dada por:

$$G(m)=\nabla\nabla C(m)=\left[G_{nl}=\frac{\partial^2 C}{\partial m_n\partial m_l},\ n,l=1,2,3,\cdots,N\right]=W_m\cdot W_m{}^T+\mu\left[J^T(m)\cdot W_d{}^T\cdot W_d\cdot J(m)+Q(m)\right]$$

com $Q(m)=\sum_l^M f_l(m)F_l{}^T(m)$ sendo $f_l(m)$ o l-ésimo elemento do vetor $f_l(m)=W_d\,.e(m)$, e

$$F_l(m)=\nabla\nabla f_l(m)=\left[\frac{\partial^2 f_l}{\partial m_i\partial m_j}\qquad i,j=1,2,3,\cdots,N\right]$$

O mínimo de (2) é obtido quando Δm_k for um mínimo da função quadrática

$$\phi(\Delta m) = g^T(m_k)\cdot\Delta m + \frac{1}{2}\Delta m^T \cdot G(m_k)\cdot\Delta m \tag{3}$$

A função $\phi(\Delta m)$ tem um ponto estacionário (ponto crítico) em Δm_k somente se o gradiente de $\phi(\Delta m)$ for para zero em Δm_k, isto é:

$$\nabla\phi(\Delta m_k) = g^T(m_k) + G(m_k)\cdot\Delta m_k = 0 \tag{4}$$

Assim, o ponto estacionário Δm_k da função $\phi(\Delta m)$ será a solução do sistema de equações lineares:

$$G(m_k)\cdot\Delta m_k = -g(m_k) \tag{5}$$

Dependendo da definição da matriz Hessiano, o ponto estacionário dado por (5) pode ser um ponto de mínimo, máximo ou de sela. De acordo com [5], a condição sobre a matriz Hessiano $G(m)$ em ser singular ou não singular e sua definição (positiva, negativa definida ou indefinida) podem ser ajustada por uma escolha apropriada do parâmetro de regularização μ.

No método de Gauss-Newton despreza-se as derivadas de segunda ordem da função custo com relação as componentes do vetor dos parâmetros do modelo (m), ou seja, não considera-se o termo Q. Assim, o Hessiano, no método de Gauss-Newton, será dado por:

$$G(m) = W_m \cdot W_m{}^T + \mu J^T(m)\cdot W_d{}^T \cdot W_d \cdot J(m) \tag{6}$$

O método reduz-se em resolver um sistema de equações lineares apresentado em (7).

$$[J^H.W_d{}^T.W_d J^H + W_m{}^T.W_m].\Delta m_j = \mathrm{J}^{\mathrm{H}}.W_d{}^T.W_d.[d^{obs} - f(m_j)] - W_m{}^T.W_m.m_j \tag{7}$$

O sistema de equações lineares (7) foi resolvido aplicando o método da eliminação de Gauss. A modelagem direta, ou seja, o projeto da antena Yagi-Uda a partir das entradas de comprimento e espaçamento entre os elementos da antena e como saída a diretividade, ângulo de meia potência e razão frente-costa, é baseado no método dos momentos apresentado em [1].

3 RESULTADOS

Para aplicar o procedimento descrito neste trabalho na otimização da diretividade, do ângulo de meia potência e da razão frente-costa da antena Yagi-Uda, utilizaremos o exemplo de antena com cinco elementos. Os elementos foram considerados os seguintes dados iniciais:

Comprimento do 1 diretor=0.419 λ;
Comprimento do 2 diretor=0.437 λ;
Comprimento do 3 diretor=0.407 λ;
Comprimento do refletor=0.483 λ;
Comprimento da fonte=0.434 λ;
espaçamento entre fonte e 1 diretor=0.271 λ;
espaçamento entre 1 e 2 diretor=0.362 λ;
espaçamento entre 2 e 3 diretor=0.390 λ; e
espaçamento entre fonte e refletor=0.224 λ.

Onde o diagrama de radiação dessa antena para o plano H é mostrado na Figura 2.

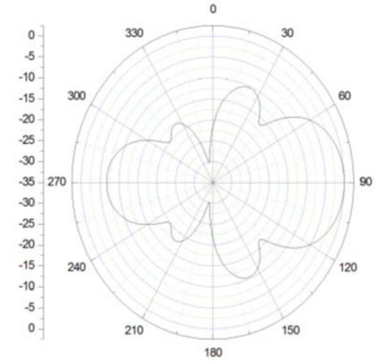

Figura 2: Diagrama de radiação (plano H) da antena Yagi-Uda de cinco elementos com os dados iniciais.

Os parâmetros de diretividade, razão frente-costa e ângulo de meia potência, para os dados iniciais, são apresentados a seguir: Ângulo de meia potência (plano E)=43,08 graus; Ângulo de meia potência (plano H)=47,81 graus; Razão frente-costa (plano E)=6,6602 dB; Razão frente-costa (plano H)=6,6516 dB; Diretividade = 11,444 dB.

Após a aplicação do método de Gauss-Newton, obteve-se os valores indicados a seguir para comprimento e espaçamento entre os elemento da antena:
Comprimento do 1 diretor=0.4308273 λ;
Comprimento do 2 diretor=0.4308273 λ;
Comprimento do 3 diretor=0.4308273 λ;
Comprimento do refletor=0.4884964 λ;
Comprimento da fonte=0.4746618 λ;
espaçamento entre fonte e 1 diretor=0.2308273 λ;
espaçamento entre 1 e 2 diretor=0.323309 λ;
espaçamento entre 2 e 3 diretor=0.323309 λ;
espaçamento entre fonte e refletor=0.1924818 λ.

Esses dados otimizados fornecem os parâmetros de diretividade, razão frente-costa e ângulo de meia potência apresentados abaixo: Ângulo de meia potência (plano E)=40,86 graus; Ângulo de meia potência (plano H)=44,89 graus; Razão frente-costa (plano E)=10,2482 dB; Razão frente-costa (plano H)=10,2372 dB; Diretividade = 12,170 dB. Nota-se que o processo de otimização aplicado neste trabalho na síntese da antena Yagi-Uda de cinco elemento, obteve resultados significativos para a diretividade, para a razão frente-costa , tanto no plano E quanto no plano H, e para o ângulo de meia potência. A Figura 3 mostra o diagrama de radiação para o plano H da antena otimizada.

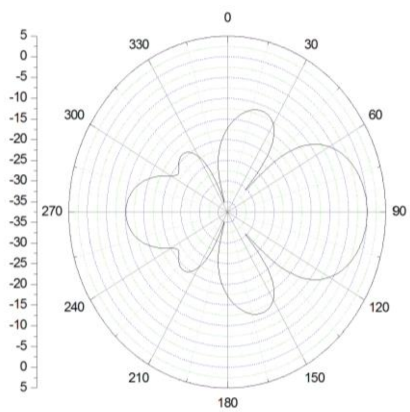

Figura 3: Diagrama de radiação (plano H) da antena Yagi-Uda de cinco elementos com os dados otimizados pelo método de Gauss-Newton.

4 CONCLUSÃO

O projeto de uma antena Yagi-Uda reunindo algumas características requeridas para este dispositivo foi desenvolvido usando a técnica de otimização de Gauss-Newton. Para tanto, foram especificados o número de elementos, sendo um refletor e um elemento energizado, diretividade, razão frente-costa e ângulo de meia. Os valores dos tamanhos e dos espaçamentos entre os elementos foram ajustados pelo processo de otimização.

Um projeto inicial da antena foi estabelecido e, a partir desses dados, aplicou-se o método de Gauss-Newton até que as faixas de valores das características pré-estabelecidas fossem atingidas.

A modelagem direta, ou seja, o projeto da antena Yagi-Uda a partir das entradas de comprimento e espaçamento entre os elementos da antena e como saída a diretividade, ângulo de meia potência e razão frente-costa, foi realizado a partir da aplicação do método dos momentos equação integral de Pocklington.

Este procedimento foi aplicado em antenas com cinco elementos, os resultados mostraram que o processo de otimização de Gauss-Newton apresenta-se como uma eficiente ferramenta para síntese de antenas Yagi-Uda.

DOI: 10.5540/03.2014.002.01.0115

© 2014 SBMAC

REFERÊNCIAS

[1] C. Balanis, “Antenna Theory and Design”. Jhon Wiley & Sons, 1997, ISBN 0-471-59268-4.

[2] D. K. Cheng, “Gain optimization for Yagi-Uda array”, IEEE Antennas and Propagation Magazine, vol. 33, pp. 42 – 45, june 1991.

[3] E. A Jones and W. T. Joines, “Design of Yagi-Uda antennas using genetic algorithmis”, IEEE Transactions and Propagation, vol. 45, pp. 1386 – 1392, setembro 1997.

[4] R. M. Ramos, R. R. Saldanha, R. H. C. Takahashi e F. J. S. Moreira,“Otimização multiobjeto aplicada ao projeto de antennas filamentares”, Ciência e Engenharia, SBMag/CBMag 2002 – Edição Especial, pp. 67– 70, dezembro 2003.

[5] V. J. da C. Farias, “Interpretação de dados de polarização induzida usando o modelo fractal para resistividades complexas e imagens tomográficas”, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Centro Tecnológico, Universidade Federal do Pará, Tese de Doutorado, 151 p.

[6] J. J Xia, T. M. Habashy, and J. A Kong, “Profile inversion in a cylindrically stratified lossy medium”. Radio Science, Vol. 29, pp. 1131 – 1141, 1994. [l] R. Courant, Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 49 (1943) 1-23.

 © 2014 SBMAC