

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

A Proporção entre Fêmeas e Machos numa População com Reprodução Sexuada é um Equilíbrio de Nash

Jeremias Dourado ¹

Universidade Federal de Uberlândia - UFU

Moiseis S. Cecconello ²

Departamento de Matemática - UFMT

1 O Princípio de Fisher na Seleção Natural

O Princípio de Fisher [2] diz que em uma população sexuada, a seleção natural de Darwin [1] faz a proporção entre macho e fêmea convergir a 1:1. Suponha que o custo da produção de filhos e filhas é o mesmo, e a proporção de nascimento dos machos seja menor que a de fêmeas, logo o sexo com menor frequência terá melhor perspectiva de acasalamento do que o sexo com maior frequência. Portanto, os machos terão em média uma contribuição maior na geração seguinte do que as fêmeas. Então, os pais geneticamente dispostos a produzir machos tendem a ter mais netos do que os números médios de netos da população. Assim, os genes para as tendências de produção de machos se espalham e os nascimentos de indivíduos do sexo masculino se tornam mais comuns. À medida que a proporção entre macho e fêmea se aproxima de 1:1, a vantagem associada com a produção de machos diminui. O mesmo raciocínio vale para as fêmeas. Portanto, a proporção 1:1 é a relação de equilíbrio [3].

2 O Equilíbrio de Nash

Na perspectiva da teoria dos jogos evolutivos, indivíduos possuem estratégias fixas e interagem aleatoriamente com os demais indivíduos da população. Nesta teoria, o retorno *payoff* de uma estratégia específica é interpretado como o *valor adaptativo*, medido em termos da taxa de reprodução, de modo que tais estratégias estão sujeitas à seleção darwiniana. O objeto de interesse desta teoria é determinar se o processo de seleção natural pode conduzir a população para uma estratégia ótima adotada pelos indivíduos ou um estado de equilíbrio, chamado de equilíbrio de Nash [4,6].

Em populações cujos indivíduos se reproduzem de maneira sexuada, podemos representar o processo de reprodução como uma interação entre dois indivíduos cujas estratégias

¹jeremiasdourado@gmail.com²moiseis@gmail.com

são ser *fêmea* (F) ou *macho* (M). Dessa forma, a interação entre indivíduos de estratégias opostas geram descendentes de modo que ambos indivíduos são bem sucedidos na interação. Por outro lado, a interação entre indivíduos de mesmo sexo não produzem descendentes e valor adaptativo é nulo para ambos indivíduos da interação. Essa interação pode, portanto, ser sintetizada na matriz de valores adaptativos dada por:

$$\begin{matrix} & F & M \\ \begin{matrix} F \\ M \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}. \quad (1)$$

Neste trabalho, analisamos a interação descrita acima por meio de um modelo estocástico como uma cadeia de Markov. Neste modelo, em uma população de N indivíduos com estratégias M ou F na proporção p , pares de indivíduos são escolhidos aleatoriamente para interagirem, recebendo valores adaptativos conforme em (1). Após um número n de interações, uma nova população é gerada na proporção \tilde{p} definido pela soma dos valores adaptativos de cada estratégia nas n interações.

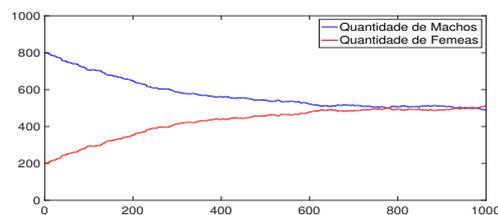


Figura 1: Simulação computacional do modelo proposto com $N = 1000$, $n = 10$ e $p = 0.8$.

A análise dos resultados das simulações computacionais nos mostram que o único ponto assintoticamente estável é aquele em que a população adota as estratégias F e M em igual proporção, levando a proporção entre fêmea e macho de uma população, evolutivamente, a convergir pra 1:1. Essa convergência acontece independente da proporção inicial entre fêmeas e machos na população, mostrando assim o Princípio de Fisher.

Referências

- [1] C. Darwin. *The Origin of Species*, Signet Classic. 1936.
- [2] R. A. Fisher. *The Genetical Theory of Natural Selection*. Clarendon, Oxford, 1930.
- [3] W.D. Hamilton. Extraordinary Sex Ratios. *Science*, volume 156, pages 477-488, 1967. DOI: 10.1126/science.156.3774.477.
- [4] J. F. Nash Jr. The Bargaining Problem. *Econometrica*, volume 18, pages 155-162, 1950.
- [5] J. F. Nash Jr. Two-person Cooperative Games. *Econometrica*, volume 21, pages 128-140, 1953.
- [6] J. Smith. *Evolution and the Theory of Games*, Cambridge University Press, 1982.