Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 7, n. 1, 2020.

Trabalho apresentado no XXXIX CNMAC, Uberlândia - MG, 2019.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

A Dinâmica das Funções de Taper dos Modelos de Ormerod, Demaerschalk e Leite e Garcia

Raylan Ramos de Sa[1]
Departamento de Engenharia Florestal, UFT, Gurupi, TO
Rasdony Klaiver Figueredo Sousa[2]
Departamento de Engenharia Florestal, UFT, Gurupi, TO
Cibele Cristina Trinca Watanabe[3]
Departamento de Engenharia de Bioprocessos e Biotecnologia, UFT, Gurupi, TO
Ricardo Augusto Watanabe[4]
Departamento de Matemática Aplicada-IMECC, UNICAMP, Campinas, SP

Resumo. As funções de taper são modelos biomatemáticos que visam descrever a forma e o afilamento do diâmetro do fuste das árvores. Tais funções desempenham papel central para o cálculo de biomassa das árvores e sortimentos florestais. Por este motivo, o ajuste das funções de taper implica obter uma boa aproximação ou melhora na estimativa dos multiprodutos madereiros: diâmetros, alturas e volumes parciais, totais e comerciais de troncos de árvores. O objetivo deste trabalho é o estudo da dinâmica de três modelos de taper os quais são denominados modelo de Ormerod, Demaerschalk e Leite e Garcia.

Palavras-chave. Funções de Taper, Ajuste de Funções de Taper, Processos Estocásticos

1 Introdução

As funções de taper são modelos biomatemáticos que visam descrever a forma e o afilamento do diâmetro do fuste das árvores [1, 2, 4]. As funções de taper são aplicadas na determinação de biomassa das árvores, isto é, através da determinação do volume do fuste das árvores é possível estimar três características fundamentais: o diâmetro em qualquer ponto do fuste, a altura no fuste em que se encontra um determinado diâmetro e o volume entre dois pontos quaisquer no fuste. Tais parâmetros permitem calcular diversos multiprodutos das árvores. Consequentemente, as funções de taper são imprescindíveis para estudos nas áreas de biologia, engenharia florestal e indústria extrativista.

Vale ressaltar que o estudo do diâmetro ao longo de um fuste também é motivado por modelos biológicos que visam estudar a geometria do tronco das árvores [3]. Por esta razão, existem na literatura as funções de taper ditas incompatíveis, em que a função de

[1]raylangpi2015@gmail.com
[2]rasdony@hotmail.com
[3]cibtrinca@yahoo.com.br
[4]ricardoaw18@gmail.com

taper revela uma boa estimativa para o perfil e subseções da árvore porém o cálculo do volume total , via funções de taper, é contraditório; e existem as funções de taper ditas compatíveis, em que o cálculo de volume e subseções da árvore, via funções de taper, é concordante [2]. O estudo conduzido por Demaerschalk [5,6] revela que há compatibilidade quando o volume total, obtido pela soma dos volumes de todas as seções determinadas através de modelos de taper, é idêntico ao volume definido pela equação de volume (integral da função de taper em relação á medida da altura do fuste da árvore).

Via de regra as funções de taper compatíveis são funções que dependem da altura total da árvore (H) (estimativa tabelada segundo o gênero da árvore), de parâmetros de referência da árvore: altura (H_r) de referência e diâmetro de referência (d_{ap}) (parâmetros em que é realizada a poda ou estudo da árvore, em geral são valores constantes por uma questão de uniformidade para cada gênero de árvore) e de fatores de taper (β) (responsáveis por descrever a geometria do fuste da árvore. Estes parâmetros são obtidos empericamente e tabelados segundo o gênero da árvore). Por este motivo as funções de taper são adaptadas para incluir termos adicionais de diâmetro e/ou altura do fuste. São exemplos de funções de taper compatíveis os modelos de Kozak (1969) [7], Demaerschalk (1972) [5], Ormerod (1973) [8] e Leite e Garcia (2001) [9]. Sendo que o modelo de Leite e Garcia é inspirado no modelo de Demaerschalk [9].

Em [10] os modelos de Kozak, Ormerod e Demaerschalk foram modificados a fim de acrescentar parâmetros estocásticos. Tal estudo é motivado por observações biológicas de que a pluviosidade (parâmetro estocástico) afeta diretamente o crescimento das árvores [2]. Segundo [10] é possível analisar a variação de diâmetro, altura e volume ao longo de um fuste frente à tais perturbações estocásticas.

Motivado por [10], este trabalho aborda questões relacionadas à dinâmica dos modelos de taper. O objetivo deste trabalho é discutir e estudar a dinâmica de três modelos de taper: modelo de Ormerod, Demaerchalk e Leite e Garcia por meio de equações diferenciais. Na seção 2 iremos descrever as principais hipóteses de tais modelos bem como descrever seus parâmetros. Na seção 3 iremos introduzir uma dinâmica capaz de descrever a evolução temporal dos modelos. Na seção 4 iremos simular e analisar tal dinâmica sobre o ponto de vista dos parâmetros biológicos e na seção 5 iremos discutir os resultados obtidos.

2 Funções de Taper: Modelo de Ormerod Modificado, Demaerschalk e Leite e Garcia

No contexto da área instrumental de mensuração florestal as funções de taper são tradicionalmente obtidas empiricamente, isto é, coletados os dados biológicos é realizado algum método de regressão para estimar os parâmetros (vide [11] para maiores detalhes e para métodos de estimativa envolvendo redes neurais). Desta forma, sabendo-se o gênero da árvore estudada é possível estimar o diâmetro, altura, coeficientes de taper e tempo de poda [4].

Todavia esta abordagem não leva em conta a dinâmica da evolução do crescimento das árvores. Esta seção visa estabelecer os fundamentos dos modelos de Ormerod, Demaerschalk e Leite e Garcia com o objetivo de abordar tais modelos do ponto de vista dinâmico na seção 4.

Os modelos de Ormerod [8], Demaerschalk [6] e Leite e Garcia [9] consideram o crescimento da árvore uniforme e homogêneo. Tais modelos são dados, respectivamente, pelas seguintes expressões:

$$d = dap\left[\frac{(H-h)}{(H-H_r)}\right]^{\beta_1} e^{\beta_2 T_x} + \epsilon, \tag{1}$$

$$d = \left[10^{\beta_0} dap^{(\beta_1 - 1)} H^{\beta_2} (H-h)^{\beta_3} \exp\left(\beta_4 T_x\right)\right] + \epsilon, \tag{2}$$

$$d = \left[10^{(\beta_0)} dap^{\beta_1 - 1} H^{\beta_2} (H-h)^{\beta_3} \exp\left(\beta_4 \frac{T_x}{dap}\right)\right] + \epsilon \tag{3}$$

onde os parâmetros são:

- h é a altura, medida em metros;
- d é o diâmetro comercial, com ou sem casca, medido em centímetro, na altura h;
- H é a altura total, medida em metros;
- H_r é a altura de referência, medida em metros, usualmente é adotado a convenção de 1,30 metros;
- d_{ap} é o diâmetro de referência, medido em centímetro, obtido na altura de referência H_r;
- $T_x = 0, 1$ para diâmetro com casca e sem casca, respectivamente;
- β_i, para $i = 0, 1, 2, 3, 4$, são denominados coeficientes de taper. São parâmetros de regressão e, com excessão de β_4 em (3) que possui dimensão de metro, são parâmetros adimensionais;
- ϵ é o erro aleatório, onde $\epsilon \sim N(0, \sigma^2)$.

Os coeficientes de taper são responsáveis por descrever a geometria da fuste da árvore [3]. Uma análise dimensional revela que para os modelos (2) e (3) temos $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 2$. Note que as equações (1), (2) e (3) revelam que $d = 0$ ocorre para $h = H$, em outras palavras, o diâmetro da árvore é decrescente. Para a equação (1) $d = dap$ precisamente quando $h = H_r$, isto é, o diâmetro de referência é obtido na altura de referência. Ainda para o modelo (1), temos que caso $\beta_1 \leq 1$ então a forma do tronco será parabólico e caso $\beta_1 \geq 1$ então a forma do tronco será neiloidal [8].

Ao longo deste trabalho iremos fazer as seguintes hipótese simplificadoras:

1. Por hipótese, H_r e d_{ap} são parâmetros fixos para cada espécie de árvore;
2. O diâmetro e a altura da árvore estão sujeitas a uma dinâmica de evolução temporal;
3. Os parâmtros de taper não evoluem com o tempo, isto é, são coeficientes fixos;

4. desconsiderar os inerentes processos aleatórios.

Observe ainda que através da seguinte mudança de variavel adimensional $y = \frac{d}{d_{ap}}$ e $x = \frac{h}{H}$ é possível concatenar as equações (1), (2) e (3) da seguinte forma:

$$y = \alpha_i (1-x)^{\gamma_i} \tag{4}$$

onde para a equação (1) temos $\alpha_1 = \frac{H^{\gamma_1} \exp(\beta_2 Tx)}{(H-H_r)^{\beta_1}}$ e $\gamma_1 = \beta_1$, para a equação (2) temos $\alpha_2 = 10^{\beta_0} dap^{(\beta_1-2)} H^{\beta_2} H^{\gamma_3} \exp(\beta_4 T_x)$ e $\gamma_2 = \beta_3$ e para a equação (3) temos $\alpha_3 = 10^{(\beta_0)} dap^{\beta_1 - 2} H^{\beta_2} H^{\gamma_3} \exp\left(\beta_4 \frac{Tx}{dap}\right)$ e $\gamma_3 = \beta_3$. Pela análise dimensional dos coeficientes de taper, temos que todos os parâmetros α_i são adimensionais.

Por meio da equação (4), introduziremos na seção 3 uma dinâmica de crescimento da altura da árove.

3 Metodologia

Segundo [2, 4] os modelos de Ormerod, Demaerschalk e Leite e Garcia são aplicáveis ás árvores de gênero Pinus e Eucalyptus, portanto faz sentido comparar a dinâmica da evolução de cada modelo de taper.

Por este motivo, em uma primeira aproximação, iremos considerar que a velocidade de crescimento do volume da árvore (V) é constante (K) e que tanto o raio da seção transversal da árvore quanto a altura da árvore são funções do tempo. Desta forma obtemos,

$$\frac{dV}{dt} = k = 2\pi r \frac{dr(t)}{dt} h + \pi r^2 \frac{dh(t)}{dt} \tag{5}$$

Observe que a derivada de (7) em relação ao tempo para γ_i nulo é constante nula e para γ_i não nulo é dada por:

$$\frac{dy}{dt} = -\alpha_i \gamma_i (1-x)^{\gamma_i - 1} \frac{dx}{dt} \tag{6}$$

As função de taper (1), (2), (3) fornecem o raio em função do tempo $(r(t) = {}^{d(t)}/_{2})$. Considerando a condição inicial $x(0) = {}^{H_r}/_{H}$, utilizando a mudança de variável exposta na seção 2, as equações (4) e (6) é possível obter a seguinte equação diferencial ordinária:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = \frac{\tilde{K}(1-x(t))^{-2\gamma_i+1}}{-2\gamma_i x(t)+1}, \\ x(0) = \frac{H_r}{H} \end{cases} \tag{7}$$

onde o parâmetro adimensional

$$\tilde{K} = \frac{K}{4\pi H \alpha_i^2 d_{ap}^2} \tag{8}$$

representa a taxa do crescimento volumétrico para determinada função de taper, onde o fator $H\alpha_i^2 d_{ap}^2$ possui unidade de volume e está associado ao cálculo do volume da árvore através de funções de taper.

A equação (7) é uma equação diferencial ordinária (EDO) de primeira ordem não-linear capaz de descrever a evolução da altura da árvore para os modelos de (1), (2), (3). Na seção 4 iremos simular a equação (7) para diferentes parâmetros biológicos e discutir tais resultados.

4 Simulações e Resultados

A literatura fornece diversos valores para a altura, diâmetro e coeficientes de taper para diversos gêneros de árvores [1,2,5,7,8]. Para efeito de simulação iremos considerar apenas as árvores da espécie Pinus elliottii. Segundo [2] tal espécie de pinheiro apresenta altura média total de $H = 26m$, diâmetro de referência $d_{ap} = 0,2m$ e crescimento volumétrico anual médio a partir da idade de maturação de $V = 0,052m^3/ano$. Sobre os coeficientes de taper, para esta espécie de árvore com esta altura e diâmetro, temos os valores de $\beta_0 = -0,6552$, $\beta_1 = 1,476038$, $\beta_2 = -0,65520$ e $\beta_3 = 1.179162$. Por meio de tais valores é possível calcular os parâmetros α_i bem como a taxa de crescimento volumétrico $\tilde{K}$. Também iremos considerar apenas o caso das árvores com casca, isto é, $Tx = 0$ uma vez que a ausência de casca é de ordem de grandeza desprezível.

Uma maneira de estudar a equação (7) é por meio da análise do campo de direções para diferentes valores de $\tilde{K}$ e γ_i (Figuras 1,2,3,4). A equação (7) revela que existem descontinuidades quando $x_1(t) = 1$ e $x_2(t) = 1/2\gamma_i$ (retas verticais nas Figuras 1,2,3). É possível estudar a região entre tais descontinuidades. Na Figura 1 existe um efeito repulsivo nas vizinhanças de $x(0)$ até x_1 e outro efeito repulsivo para $x(t) > x_1$, assim para valores de γ_i negativos o diâmetro decresce rapidamente como era esperado; a região $x(x) < x(0)$ não possui sentido biológico. Para valores de γ_i positivos, como nas Figuras 2 e 3, existe um efeito atrativo nas vizinhanças de x_2 ($x_0 < x(t) < x_2$), o valor de x_2 se desloca para diferentes valores de γ_i e ainda o campo de direções sofre uma inflexão devido á mudança de velocidade e direção ($x_2 < x(t) < x_1$) que é proporcional ao valor de $\tilde{K}$.

Note ainda que é possível resolver a EDO (7) explicitamente. Por exemplo para o caso particular de $\gamma_i = 1/2$ temos

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = \frac{\tilde{K}}{1-x}, \\ x(0) = \frac{H_r}{H} \end{cases} \tag{9}$$

Cujo plano de fase está representada na Figura 4 para diferentes valores de $\tilde{K}$. Observe ainda na Figura 4 a transição de fase que ocorre a medida que o parâmetro γ aumenta. A solução de (9) é dada por:

$$x(t) = 1 - (1 - \frac{H_r}{H}) \exp(-\tilde{K}t) \tag{10}$$

Vale notar que (9) é condizente com o modelo (7) pois o limite $x(t \to 0) = H_r/H$ representa o valor inicial e $x(t \to \infty) = 1$ representa a altura máxima.

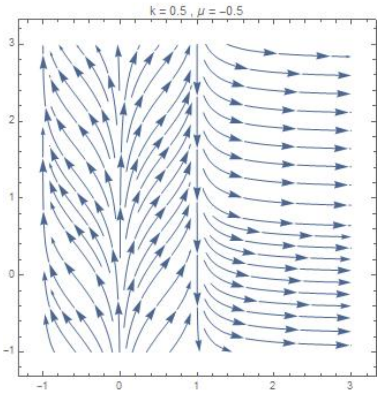

Figura 1: Modelo de Ormerod com casca refinado.

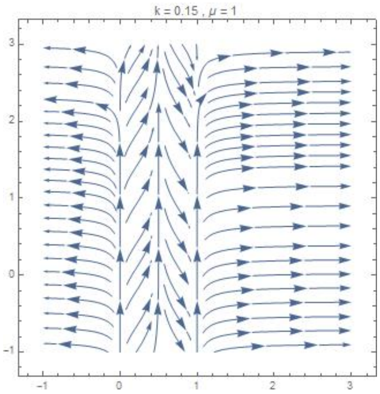

Figura 2: Modelo de Ormerod sem casca refinado.

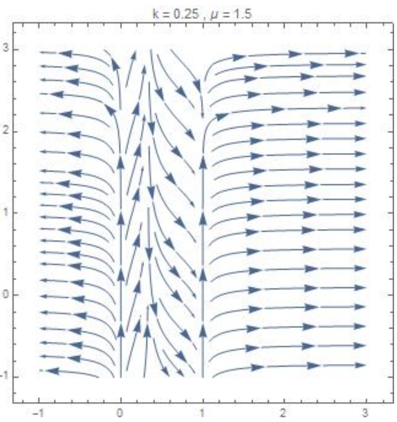

Figura 3: Modelo de Ormerod com casca refinado.

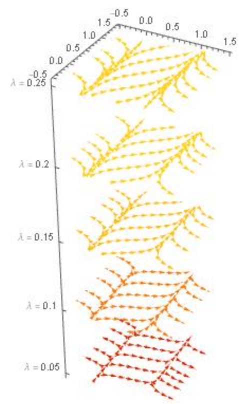

Figura 4: Planos de fase da eq. (7) para diferentes valores de $\tilde{K}$.

5 Conclusões

A dinâmica de crescimento da altura das árvores de gênero Pinus Eucalyptus pode ser modelada, a partir das funções de taper apresentadas na seção 2, pela equação (7). O o campo de direções de (7) revela efeitos de transição de fase em determinadas regiões, como observado na seção 4. No contexto da área de engenharia florestal tal abordagem é inovadora pois agrega diferentes modelos e permite estudar a evolução da altura da árvore em questão em função de parâmetros biológicos implícitos nos parâmetros α_i tais como pluviosidade, qualidade do solo e quantidade de luz.

Existem limitações para tal abordagem apresentada. Por exemplo, o modelo de Kozak é um modelo polinomial e não pode ser abordado da mesma forma. Outro ponto limitante é que as hipósteses simplificadoras 3 e 4 da seção 2 não são condizentes com a realidade: a pluviosidade é um processo estocástico que interfere na forma e no crescimento da árvore. Por este motivo, em trabalhos futuros, a modelagem da dinâmica das funções de taper deve incorporar os parâmetros biológicos implícitos e se valer de equações diferenciais estocásticas.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com o apoio da Universidade Federal do Tocantins (UFT) e os autores agradecem ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

Referências

[1] J. F. Borges, Seccionamento do fuste de Pinus taeda L. para a obtenção do volume de madeira serrada através da função de forma polinomial, Dissertação de Mestrado, UFPR, 1981.

[2] J. C. C. Campos and H. G. Leite. *Mensuração Florestal: perguntas e respostas*. Editora UFV, Viçosa-MG, 2016. ISBN: 857269465X.

[3] R. R. Forslund. A geometrical tree volume model based on he location of the centre of gravity of the bole, *Can. J. For. R.*, 12(2): 215–221,1982.

[4] J. A. Kershaw Jr., M. J. Ducey, T. W. Beers, B. Husch, *Forest Mensuration, 5a edição*. John Wiley and Sons, New Jersey, 2016.

[5] J. P. Demaerschalk. Integrated systems for the estimation of tree taper and volume, *Can. J. For. R.*, 03:90–94, 1972.

[6] J. P. Demaerschalk. Converting volume equations to compatible taper equations, *Forest Science*, 18:241–245, 1972.

[7] A. Kozak, D. D. Munro and J. H. G. Smith. Taper functions and their application in forest inventory, *Forestry Chronicle*, 45:278–283, 1969.

[8] D. W. Ormerod. A simple bole model, *Forestry Chronicle*, 49:136–138, 1973.

[9] H. G. Leite, S. L. R. Garcia. Pesquisa e desenvolvimentos em inventário, mensurações e manejo florestal na CENIBRA, *Investigações Florestais*, 3:49-56, 2001.

[10] de Sa, R. R. ; Santos, B. M. M. ; Rosa, P. H. L. ; Sousa, R. K. F. ; Resende, C. R. ; Trinca, C. C. ; Watanabe, R. A.Aspectos Biomatemáticos de Funções de Taper via Conceitos Estocásticos, *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, volume 2, 2018. `https://doi.org/10.5540/03.2018.006.02.0256`

[11] F. A. A.M.N. Soares, E. L. Flôres, C. D. Cabacinha, G. A. Carrijo, A. C. P. Veiga. Recursive diameter prediction for calculating merchantable volume of Eucalyptus clones without previous knowledge of total tree height using artificial neural networks. *Appl. Soft Comp.*, 12(8): 2030–2039, 2012.

