Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 7, n. 1, 2020.

Trabalho apresentado no XXXIX CNMAC, Uberlândia - MG, 2019.

**Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**

# Existência e unicidade de solução de equações diferenciais fracionárias impulsivas $\psi$-Hilfer

Karla Katerine Barboza de Lima [1]
UFGD
José Vanterler da Costa Souza [2]
UNICAMP
Edmundo Capelas de Oliveira [3]
UNICAMP

**Resumo**. Considera-se uma equação diferencial fracionária impulsiva, com impulsos finitos e retardo, utilizando a derivada $\psi$-Hilfer. O objetivo é descrever condições suficientes para que exista e seja única a solução do problema e, pela generalidade da derivada escolhida, descrever tais condições para uma vasta classe de derivadas que são casos particulares da derivada $\psi-$Hilfer. Para a demostração da existência e unicidade da solução são utilizados os teoremas de ponto fixo de Schauder e de Banach.

**Palavras-chave**. Equação Diferencial Fracionária, Equação Diferencial Impulsiva, Derivada Fracionária $\psi$-Hilfer, Teorema do Ponto Fixo

## 1 Introdução

As equações diferenciais com retardo são aplicadas quando a taxa de variação do estado em cada instante depende não somente do estado atual, mas sim da história do sistema. Pode ser notado na regulagem de funções fisiológicas, como o tempo de viagem de um impulso nervoso ao longo de um axônio, no efeito do uso de drogas quimioterápicas, no ciclo celular de células cancerosas, entre outros. Paralelamente, quando um fenômeno físico possui mudanças repentinas em seu estado, cuja duração é insignificante em comparação com a duração total dos fenômenos e processos estudados, tais mudanças são tratadas como instantâneas, na forma de impulsos. É abordado em várias áreas da ciência: mecânica, sistemas biológicos, como batimentos cardíacos, fluxos sanguíneos e dinâmica populacional, por exemplo.

Nas últimas décadas as equações diferenciais fracionárias ganharam muita atenção devido à descrição exata de fenômenos complexos em várias áreas. A vantagem mais importante do seu uso é sua propriedade não local, o que significa que o próximo estado

[1]karlalima@ufgd.edu.br
[2]ra160908@ime.unicamp.br
[3]capelas@ime.unicamp.br

 

de um sistema depende não apenas de seu estado atual, mas também de todos os seus estados anteriores.

Em [2], Feckan et al. descrevem condições suficientes para que a solução de um equação fracionária impulsiva exista e seja única, além da sua estabilidade do tipo Ulam-Hyers, usando a derivada de Caputo. No presente artigo, o resultado sobre existência e unicidade é estendido para uma vasta classe de derivadas, através da derivada $\psi$-Hilfer, cuja derivada de Caputo é um caso particular.

## 2 Modelo Fracionário

O objetivo é investigar condições suficientes para a existência e unicidade da solução de uma equação diferencial fracionária, com retardo e impulsos, usando a derivada fracionária $\psi$-Hilfer:

$$\begin{cases} {}^H\mathbb{D}_{0+}^{\alpha,\beta;\psi}x(t) = F(t,x_t), & t \in J' = (0,T] \setminus \{t_1, t_2, \dots, t_m\} \\ x(t) = h(t), & t \in [-\lambda, 0] \\ \triangle x(t_k) = x(t_k^+) - x(t_k^-) = I_k(x(t_k^-)), & k = 1, 2, \dots, m \\ I_{0+}^{1-\delta}x(0) = y_0 \end{cases} \tag{1}$$

onde $\lambda > 0$, $T > 0$, $F : [0,T] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função dada, $I_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $h : [-\lambda, 0]$ são contínuas; $x(t_k^+) = \lim_{\tau\to 0^+} x(t_k + \tau)$, $x(t_k^-) = \lim_{\tau\to 0^-} x(t_k - \tau)$ e $t_k$ satisfaz $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m < t_{m+1} = T < \infty$.

Para cada $x : [-\lambda, T] \to \mathbb{R}$ e $t \in I$, denotamos por $x_t$ um elemento de $PC([-\lambda, 0], \mathbb{R})$ definido por $x_t(s) = x(t+s), s \in [-\lambda, 0]$, e $x_t(\cdot)$ representa a história do estado do tempo $t - \lambda$ até o tempo $t$. As funções $I_k$, que definem a magnitude das perturbações impulsivas, são as *funções impulsivas*. Além disso, os impulsos são realizados em momentos fixos $t = t_k$ e finitos, com $k = 1, 2, ..., m$.

Buscando soluções $x(t)$ que satisfaçam as características de um sistema de equações diferenciais impulsivas, devemos lembrar que estas devem apresentar descontinuidades de primeira espécie. Portanto, buscaremos a existência da solução no espaço de Banach ponderado por partes $PC_{1-\gamma;\psi}(J, \mathbb{R})$, $J = [0, T]$ definido por

$$PC_{1-\gamma;\psi}(J,\mathbb{R}) = \left\{ \begin{array}{l} x : (0,T] \to \mathbb{R}\,; (\psi(t) - \psi(0))^{1-\delta}x(t) \in C([t_k, t_{k+1}], \mathbb{R}),\ k = 0, \dots, m, \\ \text{e existem}\, x(t_k^+),\ x(t_k^-),\ \text{com}\ x(t_k) = x(t_k^-),\ k = 1, 2, ..., m \end{array} \right\}$$

com norma

$$\|x\|_{PC_{1-\delta;\psi}} = \sup_{t\in[0,T]} |(\psi(t) - \psi(0))^{1-\delta}x(t)|,$$

onde $0 < \delta < 1$ e $\psi$ é uma função crescente e monótona positiva sobre $(a, b]$, com a derivada $\psi'$ contínua sobre $(a, b)$.

 

# 3 Existência

Usando as propriedades da derivada $\psi$-Hilfer, introduzida em [1], obtém-se diretamente os seguintes resultados:

**Lema 3.1.** *Seja $\alpha \in (0,1)$ e $F : J \times C \to \mathbb{R}$ contínua. Uma função $x \in C(J,\mathbb{R})$ é uma solução da equação integral fracionária*

$$x(t) = \left[\frac{x_0 - I_{0+}^{\alpha;\psi} F_a}{(\psi(a)-\psi(0))^{\delta-1}}\right](\psi(t)-\psi(0))^{\delta-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha-1}F(s,x_s)ds$$

*se, e somente se, $x$ é solução do seguinte problema de Cauchy*

$$\begin{cases} {}^H\mathbb{D}_{0+}^{\alpha,\beta;\psi} x(t) = F(t,x_t), & t \in [0,T] \\ x(a) = x_0, & a \in (0,T), \end{cases}$$

*onde $I_{0+}^{\alpha;\psi} F_a = I_{0+}^{\alpha;\psi} F(t,x_t)|_{t=a}$.*

Como consequência do Lema 3.1, obtemos a equação integral equivalente ao nosso Problema de Valor Principal (PVI) (1).

**Lema 3.2.** *Sejam $0 < \alpha < 1$ e $F : J \times \Omega \to \mathbb{R}$ Lebesgue mensurável com respeito a $t$ em $J$ e contínua com respeito a $\phi$ em $\Omega$. Uma função $x \in \Omega$ é uma solução do PVI (1) se, e somente se, $x \in \Omega$ é uma solução da equação integral fracionária*

$$x(t) = \begin{cases} h(t), & t \in [-\lambda, 0], \\ \frac{y_0}{\Gamma(\delta)}\Psi^\delta(t,0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t N_\psi^\alpha(s,t)F(s,x_s)ds, & t \in (0,t_1], \\ \left[\frac{y_0}{\Gamma(\delta)} + \frac{I_1(x(t_1^-))}{\Psi^\delta(t_1,0)}\right]\Psi^\delta(t,0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t N_\psi^\alpha(s,t)F(s,x_s)ds, & t \in (t_1,t_2], \\ \vdots & \vdots \\ \left[\frac{y_0}{\Gamma(\delta)} + \sum_{k=1}^m \frac{I_k(x(t_k^-))}{\Psi^\delta(t_k,0)}\right]\Psi^\delta(t,0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t N_\psi^\alpha(s,t)F(s,x_s)ds, & t \in (t_m,T], \end{cases} \tag{2}$$

*com $\Psi^\delta(t,0) = (\psi(t)-\psi(0))^{\delta-1}$ e $N_\psi^\alpha(s,t) = \psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha-1}$.*

A partir do Lema 3.2, definimos a função $Q$, com $x \in PC_{1-\gamma;\psi}(J,\mathbb{R})$, dada por

$$(Qx)(t) = \begin{cases} \frac{y_0}{\Gamma(\delta)}\Psi^\delta(t,0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t N_\psi^\alpha(s,t)F(s,x_s)ds, & t \in (0,t_1], \\ \left[\frac{y_0}{\Gamma(\delta)} + \frac{I_1(x(t_1^-))}{\Psi^\delta(t_1,0)}\right]\Psi^\delta(t,0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t N_\psi^\alpha(s,t)F(s,x_s)ds, & t \in (t_1,t_2], \\ \vdots & \vdots \\ \left[\frac{y_0}{\Gamma(\delta)} + \sum_{k=1}^m \frac{I_k(x(t_k^-))}{\Psi^\delta(t_k,0)}\right]\Psi^\delta(t,0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t N_\psi^\alpha(s,t)F(s,x_s)ds, & t \in (t_m,T]. \end{cases}$$

Vamos, agora, introduzir as seguintes hipóteses:

 

H1: Existe uma constante $q \in (0, \alpha)$ e uma função real $m$ tal que $m(\cdot)(\psi'(\cdot))^q \in L^{\frac{1}{q}}(J, \mathbb{R})$ e $|F(t, \phi)| \leq m(t)$, para quase todo $t \in J$ e toda $\phi \in PC_{1-\delta;\psi}$.

H2: Existe uma constante $p \in (0, \alpha)$ e uma função real $\mu(t)$ tal que $\mu(\cdot)(\psi'(\cdot))^p \in L^{\frac{1}{p}}(J, \mathbb{R})$ e $\|F(t, \phi) - F(t, \varphi)\| \leq \mu(t)\|x^1 - x^2\|_{PC_{1-\delta;\psi}}$, para quase todo $t \in J$ e toda $\phi, \varphi \in PC_{1-\delta;\psi}$.

H3: $I_k \in C(J, \mathbb{R})$ e leva conjuntos limitados em conjuntos limitados. Então existe uma constante $\lambda^*$ tal que $\|I_k(x(t_k^-)) - I_k(y(t_k^-))\| \leq \lambda^* \|x - y\|_{PC_{1-\delta;\psi}}$, para cada $x, y \in B_\rho = \{u \in PC_{1-\delta;\psi} : \|u\|_{PC_{1-\delta;\psi}} \leq \rho\}$

**Teorema 3.1.** *Admita que $H_1$ vale. Então o PVI (1) possui pelo menos uma solução em $J$, desde que*

$$\frac{|y_0|}{\Gamma(\delta)} + \left[ mM^* + \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \left( \frac{1-q}{\alpha - q} \right)^{1-q} (\psi(T) - \psi(0))^{\alpha - q} \right] (\psi(T) - \psi(0))^{1-\delta} \leq \rho, \quad (3)$$

*onde* $M = \left( \int_0^T (m(s))^{\frac{1}{q}} \psi'(s) ds \right)^q$ *e* $M^* = \max\limits_{1 \leq k \leq m} \{|I_k(x(t_k^+))| : \|x\|_{PC_{1-\delta;\psi}} \leq \rho\}$.

*Demonstração.* Seja $B_\rho = \{u \in PC_{1-\gamma;\psi}(J, \mathbb{R}) : \|u\|_{PC_{1-\delta;\psi}} \leq \rho\}$, um conjunto que é fechado, limitado e convexo em $PC_{1-\delta;\psi}(J, \mathbb{R})$. Temos que $Q$ leva $B_\rho$ em $B_\rho$, pois

$$(\psi(t) - \psi(0))^{1-\delta}(Qx)(t) = \frac{y_0}{\Gamma(\delta)} + \sum_{t_1 \leq t_i \leq t_k} \frac{I_i(x(t_i))}{\psi^\delta(t_i, 0)} + (\psi(t) - \psi(0))^{1-\delta} I_{0+}^{\alpha,\beta;\psi} F(t, x_t)$$

é contínua em $[t_k, t_{k1}]$, $k = 1, \ldots, m$. A única continuidade não óbvia vem da função $I_{0+}^{\alpha,\beta;\psi} F(t, x_t)$. Mas se $s_2 \to s_1$, então

$$\begin{aligned}
|I_{0+}^{\alpha,\beta;\psi} F_{s_2} - I_{0+}^{\alpha,\beta;\psi} F_{s_1}| &= \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^{s_1} [N_\psi^\alpha(s_2, s) - N_\psi^\alpha(s_1, s)] \psi'(t) F(s, x_s) ds \right. \\
&\quad \left. + \int_{s_1}^{s_2} N_\psi^\alpha(s_2, s) \psi'(s) F(s, x_s) ds \right| \\
&\leq \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \left( \int_0^{s_1} [N_\psi^\alpha(s_2, s) - N_\psi^\alpha(s_1, s)]^{\frac{1}{1-q}} \psi'(s) ds \right)^{1-q} \left( \int_0^T (m(s))^{\frac{1}{q}} \psi'(s) ds \right)^q \\
&\quad + \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \left( \int_{s_1}^{s_2} [N_\psi^\alpha(s_2, s)]^{\frac{1}{1-q}} \psi'(s) ds \right)^{1-q} \left( \int_0^T (m(s))^{\frac{1}{q}} \psi'(s) ds \right)^q \\
&\leq \tfrac{M}{\Gamma(\alpha)} \left( \tfrac{1-q}{\alpha-q} \right)^{1-q} \left[ (\psi(s_1) - \psi(0))^{\frac{\alpha-q}{1-q}} - (\psi(s_2) - \psi(0))^{\frac{\alpha-q}{1-q}} \right] \\
&\quad + \tfrac{2M}{\Gamma(\alpha)} \left( \tfrac{1-q}{\alpha-q} \right)^{1-q} (\psi(s_2) - \psi(s_1))^{\frac{\alpha-q}{1-q}} \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

DOI: 10.5540/03.2020.007.01.0381  

Além disso, para $t \in (t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, 1 \ldots, m$, temos:

$$\begin{aligned}
|(\psi(t)-\psi(0))^{1-\delta}Qx(t)| &= \left| \tfrac{y_0}{\Gamma(\delta)} + \sum_{t_1 \le t_i \le t_k} \frac{I_i(x(t_i))}{\psi^\delta(t_i,0)} + (\psi(t)-\psi(0))^{1-\delta} I_{0+}^{\alpha;\psi} F(t,x_t) \right| \\
&\le \tfrac{|y_0|}{\Gamma(\delta)} + mM^*(\psi(T)-\psi(0))^{1-\delta} + \tfrac{(\psi(T)-\psi(0))^{1-\delta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (\psi(t)-\psi(s))^{\alpha-1}\psi'(s)|F(s,x_s)|ds \\
&\le \tfrac{|y_0|}{\Gamma(\delta)} + \left[ mM^* + \tfrac{M}{\Gamma(\alpha)} \left(\tfrac{1-q}{\alpha-q}\right)^{1-q} (\psi(T)-\psi(0))^{\alpha-q} \right] (\psi(T)-\psi(0))^{1-\delta} \le \rho.
\end{aligned}$$

Portanto, $\|Qx\|_{PC_{1-\delta;\psi}} \le \rho$.

Ademais, $Q$ é contínua. Como $(\psi(t)-\psi(0))^{1-\delta}\left[(Qx)(t) - (Qx^l)(t)\right]$ é igual a

$$\sum_{i=1}^k \frac{I_i(x^l(t_i^-)) - I_i(x(t_i^-))}{\psi^\delta(t_k,0)} + \frac{(\psi(t)-\psi(0))^{1-\delta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t N_\psi^\alpha(s,t)[F(s,x_s^l) - F(s,x_s)]ds,$$

pela continuidade de $F$ em $x$ e de $I_k$ em $x(t_k)$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{i=1}^k \frac{I_i(x^l(t_i^-)) - I_i(x(t_i^-))}{\psi^\delta(t_k,0)} + \frac{(\psi(t)-\psi(0))^{1-\delta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t N_\psi^\alpha(s,t)[F(s,x_s^l) - F(s,x_s)]ds \right| \\
\le\ & (\psi(T)-\psi(0)) \sum_{i=1}^k |I_i(x^l(t_i^-)) - I_i(x(t_i^-))| + \frac{(\psi(t)-\psi(0))^{1-\delta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t N_\psi^\alpha(s,t)|F(s,x_s^l) - F(s,x_s)|ds \\
\le\ & (\psi(T)-\psi(0)) \sum_{i=1}^k |I_i(x^l(t_i^-)) - I_i(x(t_i^-))| + \frac{(\psi(t)-\psi(0))^{1-\delta+\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \sup_{t\in J} |F(s,x_s^l) - F(s,x_s)| \longrightarrow 0,
\end{aligned}$$

quando $l \to \infty$. Assim, $\|Qx - Qx^l\|_{PC_{1-\delta;\psi}} \to 0$, de onde concluímos que $Q$ é contínua em $PC_{1-\delta;\psi}$.

Por fim, vamos mostrar que o conjunto $QB_\rho = \{Qx : [0,T] \to \mathbb{R};\, x \in B_\rho\}$ é equicontínuo em $(0,T]$. De fato, para $k = 0, 1, \ldots, m$, se $a \in (t_k, t_{k+1})$ e $t \to a$ então

$$|(Qx)(a) - (Qx)(t)| \ \le \left| \tfrac{y_0}{\Gamma(\delta)} + \sum_{i=1}^k \frac{I_i(x(t_i^-))}{\psi^\delta(t_k,0)} \right| \left|\psi^\delta(a,0) - \psi^\delta(t,0)\right| + |I_{0+}^{\alpha;\psi}F_t - I_{0+}^{\alpha;\psi}F_a|.$$

Decorre da continuidade de $\psi^\delta(t,0)$ em $t \in (0,T]$ que $\left|\psi^\delta(a,0) - \psi^\delta(t,0)\right| \to 0$, quando $t \to a$; por outro lado, vimos que $|I_{0+}^{\alpha;\psi}F_t - I_{0+}^{\alpha;\psi}F_a| \to 0$, quando $t \to a$. Portanto, $|(Qx)(a) - (Qx)(t)| \to 0$, qualquer que seja $Qx \in QB_\rho$, que é equicontínuo em $(t_k, t_{k+1})$, $k = 0, 1, \ldots m$.

Além disso, o conjunto $QB_\rho(t) = \{u(t); u \in QB_\rho\} \subset B_\rho$ é uniformemente limitado. Com isso, fixado $t_0 \in (t_k, t_{k+1}]$ e tomando a sequência $u_n(t) \in QB_\rho(t)$, obtemos

 

$$
\begin{aligned}
|u_n(t_0)| &= \left| \left( \tfrac{y_0}{\Gamma(\delta)} + \sum_{i=1}^{k} \frac{I_i(x(t_i^-))}{\psi^\delta(t_k,0)} \right) \psi^\delta(t_0,0) + I_{0+}^{\alpha;\psi} F_{t_0} \right| \\
&\leq \left| \tfrac{y_0}{\Gamma(\delta)} + \sum_{i=1}^{k} \frac{I_i(x(t_i^-))}{\psi^\delta(t_k,0)} \right| \psi^\delta(t_0,0) + \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \left( \int_0^{t_0} (\psi(t_0)-\psi(s))^{\frac{\alpha-1}{1-q}} \psi'(s) ds \right)^{1-q} M \\
&\leq \left| \tfrac{y_0}{\Gamma(\delta)} + \sum_{i=1}^{k} \frac{I_i(x(t_i^-))}{\psi^\delta(t_k,0)} \right| \psi^\delta(t_0,0) + \tfrac{M}{\Gamma(\alpha)} \left( \tfrac{1-q}{\alpha-q} \right)^{1-q} (\psi(T)-\psi(0))^{\alpha-q} = K,
\end{aligned}
$$

onde $K$ é uma constante que depende apenas do $t_0$ fixado, e não do índice $n \in \mathbb{N}$. Logo, $(u_n(t_0))$ é uma sequência limitada de números reais, possuindo uma subsequência convergente. Portanto, $QB_\rho(t)$ é relativamente compacto. Analogamente, mostra-se que $QB_\rho(t_k^+)$ e $QB_\rho(t_k^-)$ são relativamente compactos, com $k = 1, 2, \ldots, m$.

Pelo teorema de Arzelà-Ascoli para $PC_{1-\delta;\psi}$, adaptado de [3], concluímos que $QB_\rho$ é relativamente compacto em $PC_{1-\delta;\psi}$, de onde segue que $Q : B_\rho \to B_\rho$ é completamente contínua e, assim, compacta. Pelo teorema do ponto fixo de Schauder, $Q$ possui um ponto fixo, o qual é solução do PVI (1). □

# 4 Unicidade

**Teorema 4.1.** *Admita que $H_1$, $H_2$ e $H_3$ valem. Então o PVI (1) possui uma única solução em $J$, desde que a desigualdade (3) e a desigualdade*

$$c = \frac{(\psi(T)-\psi(0))^{1-\delta} + \frac{\alpha-p}{1-p}}{\Gamma(\alpha)} u^* + \lambda^* m (\psi(T)-\psi(0))^{1-\delta} < 1$$

*valem, onde* $u^* = \left( \int_0^T (\mu(s))^{\frac{1}{\gamma}} ds \right)^\gamma$.

*Demonstração.* Vamos usar o teorema do princípio de contração de Banach para mostrar que $Q : B_\rho \to B_\rho$ possui um único ponto fixo.

Com efeito, sejam $x^1, x^2 \in B_\rho$. Pela hipótese $H_2$, temos que

$$
\begin{aligned}
\int_0^t N_\psi^\alpha(s,t) |F(s,x_s^1) - F(s,x_s^2)| ds &\leq \int_0^t N_\psi^\alpha(s,t) u(t) \|x^1 - x^2\|_{PC_{1-\delta;\psi}} ds \\
&\leq \|x^1 - x^2\|_{PC_{1-\delta;\psi}} \left( \tfrac{1-p}{\alpha-p} \right)^{1-p} u^* (\psi(t)-\psi(0))^{\frac{\alpha-p}{1-p}}.
\end{aligned}
$$

Agora, pela hipótese 3, temos que

$$\sum_{t_1 \leq t_i \leq t} |I_i(x^1(t_i^-)) - I_i(x^2(t_i^-))| (\psi(t_i)-\psi(0))^{1-\delta} \leq (\psi(T)-\psi(0))^{1-\delta} m \lambda^* \|x^1 - x^2\|_{PC_{1-\delta;\psi}}.$$

Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned}\|Qx^1 - Qx^2\|_{PC_{1-\delta;\psi}} &\leq \left( \frac{(\psi(T)-\psi(0))^{1-\delta+\frac{\alpha-p}{1-p}}}{\Gamma(\alpha)} u^* + \lambda^* m(\psi(T) - \psi(0))^{1-\delta} \right) \|x^1 - x^2\|_{PC_{1-\delta;\psi}} \\ &\leq c\|x^1 - x^2\|_{PC_{1-\delta;\psi}},\end{aligned}$$

com $c < 1$. Portanto, $Q$ é uma contração e, pelo teorema de Banach, o ponto fixo de $Q$ é único. Consequentemente, o PVI (1) possui solução única. □

# 5 Conclusões

Apresentamos condições necessárias para que o PVI (1) tenha uma única solução. Com isso, expandimos este resultado para uma vasta classe de derivadas, que são casos particulares da derivada $\psi$-Hilfer. Em particular, tomando $\psi(x) = x$ e fazendo $\beta \to 1$, obtemos a derivada de Caputo e recuperamos o resultado apresentado em [2].

# Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq)- Processo nº 160331/2014-5 e da Universidade Federal da Grande Dourados (UFGD). Em particular, o autor José Vanterler da Costa Souza agradece ao IMECC-UNICAMP, por uma bolsa de pós-doutorado.

# Referências

[1] J. Vanterler da C. Sousa and E. Capelas de Oliveira. On the $\psi$-Hilfer fractional derivative, *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, **60**, 72-91, (2018). DOI: 10.1016/j.cnsns.2018.01.005.

[2] M. Feckan and Y. Zhou and J. Wang. On the concept and existence of solution for impulsive fractional differential equations, *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, **17**, 3050-3060, (2012). DOI: 10.1016/j.cnsns.2011.11.017.

[3] W. Wei, X. Xiang, and Y. Peng, Nonlinear impulsive integro-differential equations of mixed type and optimal controls, *Optimization*, **55**, 141-156, (2006. DOI: 10.1080/02331930500530401.

 