

## Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

---

# Fluxo para Poços em Aquíferos: Solução via Método de Elementos Analíticos

João Paulo Martins dos Santos<sup>1</sup>

Academia da Força Aérea - AFA

Sardar Muhammad Hussain<sup>2</sup>

Balochistan University of Information Technology, Engineering and Management Sciences

Alessandro Firmiano de Jesus<sup>3</sup>

Academia da Força Aérea - AFA

Edson Wendland<sup>4</sup>

Universidade de São Paulo - USP

### Resumo.

Soluções analíticas para um conjunto de problemas envolvendo o fluxo subterrâneo podem ser calculadas por meio do método de elementos analíticos (MEA). A possibilidade de combinar a função potencial em uma única expressão matemática torna o MEA atrativo, pois permite considerar problemas envolvendo aquíferos confinados, não confinados ou a combinação de ambos em uma mesma equação. Neste artigo, o método de elementos analíticos foi utilizado para obter a solução do fluxo subterrâneo sob a ação conjunta de poços de bombeamento e injeção. O código computacional, baseado em uma biblioteca de computação científica, foi formulado para permitir a utilização de dados aleatórios para as vazões, posições e raios dos poços e pode ser utilizado para avaliação de diversos cenários envolvendo o fluxo para poços. Os resultados computacionais ilustram alguns cenários envolvendo o fluxo uniforme e os poços. Estes englobam a influência do fluxo uniforme na configuração das linhas potenciais e de corrente, a utilização da teoria das imagens para tratar a presença da fronteira física com carga constante e o cálculo da carga hidráulica.

**Palavras-chave** Fluxo Subterrâneo, Princípio da Superposição, Python Científico.

## 1 Introdução

O método de elementos analíticos (MEA) foi desenvolvido por Otto Strack para modelar a interação entre o fluxo subterrâneo e o canal *Tennessee-Tombigbee (1976)* [7]. Segundo Strack, [7], o modelo foi construído para reproduzir tanto o fluxo regional quanto o fluxo local devido ao funcionamento de um conjunto de poços. O método têm sido usado com sucesso em projetos conforme ilustrado em [7], [11] e pode ser visto como uma

---

<sup>1</sup>jp2@usp.br

<sup>2</sup>smhussain01@gmail.com

<sup>3</sup>lezandro@gmail.com

<sup>4</sup>ew@sc.usp.br

alternativa aos métodos de diferenças finitas e elementos finitos na modelagem do fluxo subterrâneo [1].

As principais referências da literatura sobre o assunto são [8], [9] e [10]. Os principais conceitos e avanços na teoria do método de elementos analíticos são discutidos em [7] e [11]. No Brasil, o método é pouco difundido e seus principais estudos foram analisados em [7] e [2]. Discussões e aplicações adicionais podem ser encontradas em [6] e [4].

O método dos elementos analíticos (MEA) é um método computacional caracterizado pela discretização das componentes do sistema tais como: o fluxo uniforme, poços, rios, não homogeneidades, fraturas, etc. É um método livre de malha e não sofre dos problemas associados às discretizações dos domínios, tais como, o método de diferenças finitas ou o método de elementos finitos. O foco é a discretização das componentes do sistema de forma que a solução geral é obtida pela superposição das soluções.

Nessa metodologia de resolução, cada componente eleva a complexidade da solução. Problemas envolvendo o fluxo para poços em aquíferos homogêneos e isotrópicos podem ser resolvidos por meio da aplicação da superposição e da teoria das imagens. No entanto, problemas mais complexos envolvendo a presença de inhomogeneidades, fraturas, barreiras físicas no interior do domínio ou a combinação de várias características em um mesmo domínio requerem um método iterativo ou solução de um sistema linear para o cálculo da solução analítica. As referências [1], [6] e [4] fornecem detalhes adicionais.

Neste artigo, o objetivo é a aplicação do método dos elementos analíticos para obter a função potencial  $\Phi$  e da função de corrente  $\Psi$  devido ao funcionamento de um conjunto finito de poços com localizações, vazões e raios aleatoriamente escolhidos. A função potencial  $\Phi$  fornece a distribuição de cargas hidráulicas  $\phi$  sobre o domínio computacional tanto em aquífero confinado quanto em aquífero livre ou combinação de ambos. Por sua vez, a função  $\phi$  possibilita a obtenção do rebaixamento do nível potencial devido o funcionamento de um conjunto de poços de bombeamento, o incremento devido à presença de poços de injeção ou áreas de infiltração e, ainda, o correspondente campo de velocidades das águas subterrâneas. Complementando o cenário, a função  $\Psi$  fornece as linhas de corrente, ortogonais às isolinhas de potencial.

## 1.1 Modelo matemático

A equação governante para o fluxo bidimensional de águas subterrâneas, escrita em termos do potencial de descarga  $\Phi = \Phi(x, y)$ , para um aquífero isotrópico e homogêneo é dada por:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}(-Q_x) + \frac{\partial}{\partial y}(-Q_y) = 0, \quad (1)$$

sendo  $(Q_x, Q_y) = (-\partial\Phi/\partial x, -\partial\Phi/\partial y) = (-\Phi_x, -\Phi_y)$  o vetor de descarga potencial. Em ambos os casos, aquíferos confinado e não confinado, são tratados pela mesma equação. A hipótese de Dupuit-Forchheimer e detalhes adicionais para obtenção da equação (1) são discutidos em [10].

A função de corrente,  $\Psi = \Psi(x, y)$  possui o gradiente ortogonal ao gradiente de  $\Phi$  e fornece a direção preferencial do fluxo de águas subterrâneas. Essas funções  $\Phi$  e  $\Psi$  são

relacionadas pelas seguintes *Equações de Cauchy-Riemman*:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{\partial\Psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = -\frac{\partial\Psi}{\partial x}. \quad (2)$$

Assim, o potencial de descarga  $\Phi$ , que é a solução da equação (1), relaciona-se com a carga hidráulica  $\phi$  por meio das expressões:

$$\Phi = KH\phi + C_{conf}, \text{ se } \phi \geq H \quad \text{e} \quad \Phi = \frac{1}{2}K\phi^2 + C_{unconf}, \text{ se } \phi < H, \quad (3)$$

em que  $H$  é a espessura do aquífero,  $K$  a condutividade hidráulica,  $C_{conf}$  e  $C_{unconf}$  são constantes. A base do aquífero foi tomada como sendo o nível de referência. A utilização da equação (3) permite tratar tanto aquíferos confinados, não confinados ou a combinação de ambos. Uma discussão detalhada é apresentada em [10].

## 1.2 O princípio da superposição

Devido à linearidade da equação (1), o Princípio da Superposição pode ser aplicado. Portanto, se  $\Phi_i$  é solução da equação (1) e  $\Psi_i$  é a respectiva função de corrente para  $i = 1, \dots, N$ , então:

$$\Phi = \sum_{i=1}^N \Phi_i \quad \text{e} \quad \Psi = \sum_{i=1}^N \Psi_i \quad (4)$$

são, respectivamente, solução de (1) e a função de corrente, obtida da equação (2).

O potencial constante  $\Phi_0$ , o potencial de fluxo uniforme  $\Phi_{uni}$  e o potencial do poço  $\Phi_w$  são elementos analíticos elementares. As funções  $\Phi$  e respectivas funções  $\Psi$  são dados por:

$$\begin{aligned} \Phi_u &= -Q_{x_0} \cdot x - Q_{y_0} \cdot y & \Psi_u &= -Q_{x_0} \cdot y + Q_{y_0} \cdot x \\ \Phi_w &= \frac{Q}{4\pi} \ln((x - x_w)^2 + (y - y_w)^2) + C_w & \Psi_w &= \frac{Q}{2\pi} \arctan\left(\frac{y - y_w}{x - x_w}\right) \end{aligned} \quad (5)$$

em que  $Q_{x_0}$ ,  $Q_{y_0}$ ,  $C_w$  são constantes,  $Q$  e  $(x_w, y_w)$  são, respectivamente, a vazão e a localização do poço. Detalhes adicionais e algumas aplicações são apresentados em [10].

Para problemas envolvendo fronteiras de Dirichlet, o método das imagens, que é baseado na superposição e na simetria de localização [10], deve ser considerado. Por exemplo, se um poço de bombeamento está localizado em  $(-d, 0)$  e  $(0, y)$  é a fronteira de Dirichlet com carga hidráulica constante  $\Phi_0$ , então a função

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi} \ln((x + d)^2 + (y - y_w)^2) - \frac{Q}{4\pi} \ln((x - d)^2 + (y - y_w)^2) + \Phi_0 \quad (6)$$

é a solução da equação de Laplace satisfazendo a condição de contorno;  $\Phi$  representa o potencial de um poço de bombeamento e de um poço de injeção, com localizações simétricas em relação a reta  $x = 0$  e vazões  $+Q$  e  $-Q$ , respectivamente.

## 2 A Implementação Computacional

Os problemas aqui estudados constituem-se, basicamente, de um conjunto finito de poços de bombeamento ou injeção com vazões distintas. As posições,  $(x_{w_i}, y_{w_i})$ , as vazões,  $Q_i$ , e os raios dos poços,  $r_{w_i}$ , foram gerados aleatoriamente conforme as seguintes considerações:

- Número de poços: são valores inteiros  $k_1, k_2$  tais que  $k_1 + k_2 = N$  represente a quantidade de poços no domínio computacional.
- Coordenadas ( $[m]$ ): as coordenadas  $(x_w, y_w)$  são aleatórias por meio da função `randint` de `NumPy` [12]. Um intervalo de variação  $[a, b]$  foi estabelecido para cada uma das coordenadas.
- Vazões ( $[m^3/d]$ ): gerar  $k_1$  vazões aleatórias em um intervalo especificado  $[c, d]$ ,  $c, d > 0$  e  $k_2$  vazões aleatórias em um intervalo  $[-d, -c]$ .
- Concatenação: obter uma lista de coordenadas dos poços e uma lista de vazões.
- Raios dos poços ( $[m]$ ): gerar os raios dos poços em um intervalo  $[r_1, r_2]$ , com  $0 < r_1, r_2 \ll 1$  e distribuição uniforme.
- Dados adicionais:  $K[m/d]$ ,  $Q_{x_0}, Q_{y_0}[m^2/d]$  e  $\Phi_0[m]$  são arbitrários, mas não são aleatórios.

As considerações e discussões para o cálculo da carga hidráulica  $\phi$  pode ser encontrado em [10]. O código computacional foi desenvolvido utilizando linguagem Python por meio do sistema SciPy, [5], cujos componentes englobam as bibliotecas NumPy, [12], e Matplotlib [3].

## 3 Resultados e Discussão

As soluções de elementos analíticos para um conjunto de  $N$  poços em campo uniforme, calculadas por meio das expressões (4), (5) e (6), são dadas por:

$$\Phi = \Phi_{uni} + \sum_{i=1}^N \Phi_i + \sum_{i=1}^N \Phi_{imag_i} + C \quad \Psi = \Psi_{uni} + \sum_{i=1}^N \Psi_i + \sum_{i=1}^N \Psi_{imag_i} \quad (7)$$

em que  $\Phi_{imag_i} = 0$  se não há fronteira de Dirichlet.

### 3.1 Problema 01

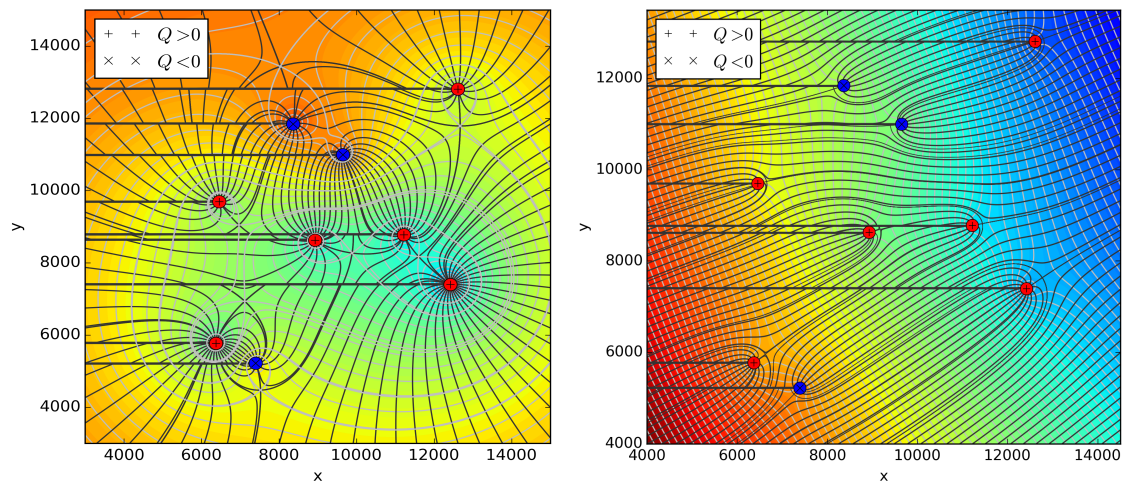
Considere o fluxo uniforme e um conjunto de  $N = 9$  poços em operação em um domínio infinito. Os principais parâmetros são:  $k_1 = 6, k_2 = 3, [a, b] = [5000; 13000], [c, d] = [100; 300], [r_1, r_2] = [0, 1; 0, 2]$  e  $\Phi_0 = \Phi(0, 0) = 100m$ . Nesse caso, dois cenários de potencial de fluxo uniforme  $\Phi_{uni}$  foram considerados: o primeiro adota  $Q_{x_0} = 0, 0$  e

$Q_{y_0} = 0,0$  (Figura 1(a)), enquanto que o segundo adota  $Q_{x_0} = 0,1$  e  $Q_{y_0} = 0,005$  (Figura 1(b)).

As funções  $\Phi$  e  $\Psi$  são dadas pelas expressões em (7) com  $\Phi_{imag_i} = 0$ . Os resultados da sobreposição das isolinhas das funções  $\Phi$  e  $\Psi$  são apresentados nas Figuras 1(a) e 1(b).

A Figura 1(a), mostra o efeito da operação dos poços em um domínio com potencial uniforme nulo  $\Phi_{uni} = 0$ . Neste caso, toda a água injetada é captura pelo bombeamento conforme pode ser observado nas linhas de corrente saindo dos poços de injeção para os poços de bombeamento. A análise das linhas de corrente mostra que um poço de bombeamento captura água somente do aquífero, enquanto que a vazão dos demais poços é uma composição entre a água proveniente dos poços de injeção e do aquífero.

Por sua vez, a Figura 1(b) apresenta o efeito do potencial de fluxo uniforme não nulo sobre a operação dos poços. A presença do potencial não nulo afeta drasticamente o cenário das linhas potenciais e de corrente. Diferentemente do cenário anterior, o fluxo uniforme abastece a maioria dos poços. Devido à localização dos poços de injeção, a água proveniente da injeção é parcialmente capturada e o restante é disponibilizada ao aquífero.



(a) Campo uniforme  $Q_{x_0} = Q_{y_0} = 0$ .

(b) Campo uniforme  $Q_{x_0} = 0,1$  e  $Q_{y_0} = 0,05$ .

Figura 1: Isolinhas das soluções  $\Phi$  e  $\Psi$  para um conjunto de  $N$  poços em domínio com potencial uniforme.

### 3.2 Problema 02

Considere o fluxo uniforme com  $Q_{x_0} = 0,1$  e  $Q_{y_0} = 0,0$  e um conjunto de  $N = 9$  poços em operação em um domínio com um rio de carga constante  $\Phi_0$  em  $x_0 = 5000$ . Os dados são:  $k_1 = 6$ ,  $k_2 = 3$ ,  $[a, b] = [2200; 5000]$ ,  $[c, d] = [100; 300]$ ,  $[r_1, r_2] = [0, 1; 0, 2]$  com distribuição uniforme e  $\Phi_0 = \Phi(0, y) = 100$  e  $K = 0,0001$ ,  $H = 20$ .

Analogamente ao caso anterior, as funções  $\Phi$  e  $\Psi$  são dadas pelas expressões (7) com  $\Phi_{imag_i} \neq 0$ . A Figura 2(a) apresenta os resultados da sobreposição das isolinhas das funções  $\Phi$  e  $\Psi$ , enquanto que 2(b) apresenta a sobreposição das isolinhas de  $\Psi$  com as

isolinhas da função  $\phi$ , obtida pela utilização da equação (3). Note que há similaridade entre as figuras pois o fluxo é confinado.

A análise do cenário da Figura 2(a), mostra que parte da água injetada é captura pelo bombeamento, enquanto o restante é transmitida ao rio, representada pela fronteira de Dirichlet  $x = 5000$ . Por sua vez, o rio abastece parcialmente o poço de bombeamento mais à direita e os demais poços de bombeamento são abastecidos pelo aquífero e pelos poços de injeção.

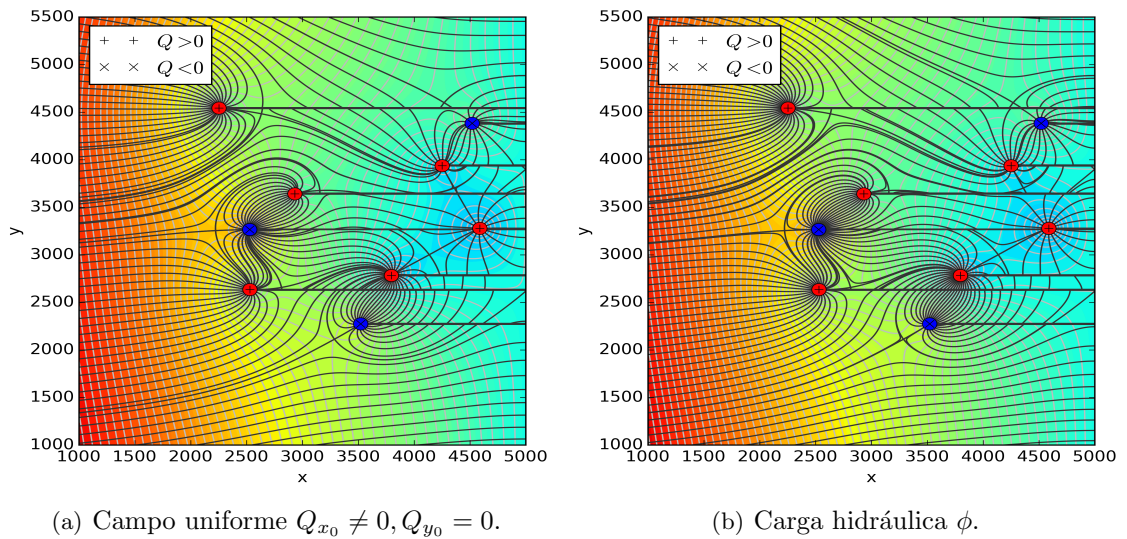


Figura 2: Isolinhas das soluções  $\Phi$ ,  $\phi$  e  $\Psi$  para um conjunto de  $N$  poços em domínio com potencial uniforme e fronteira de Dirichlet.

## 4 Conclusões

O método de elementos analíticos possibilitou o cálculo das soluções analíticas de um aquífero sob o efeito da operação de um conjunto de poços de bombeamento e injeção. A inclusão da aleatoriedade das posições, das vazões e dos raios dos poços permitiu avaliar cenários mais complexos e permite explorar diversas configurações de cenários para poços de bombeamento e injeção. Além disso, fornece a capacidade de explorar as influências do fluxo uniforme com componentes apenas na direção  $x$ , apenas na direção  $y$  ou em ambas as direções. A possibilidade de utilizar a teoria das imagens permite resolver problemas com fronteiras de Dirichlet e adiciona uma outra possibilidade de cenário. O código permite a exploração de uma vasta gama de cenários, pode ser estendido diretamente para explorar a presença de barreiras físicas, a combinação entre barreira física e fronteira de carga constante e não está restrito à quantidade de poços no domínio computacional.

## Referências

- [1] M. F. Alencar, E. Wendland. Método de elementos analíticos: uma alternativa para a modelagem de escoamento subterrâneo, *Águas Subterrâneas*, 27:110-124, 2013.
- [2] V. F. Boico. Modelo analítico para a avaliação do escoamento de água no Aquífero Guarani em Bauru/SP, Dissertação de Mestrado, EESC/USP, 2016.
- [3] J. D. Hunter. Matplotlib: A 2d graphics environment, *Computing In Science & Engineering*, *IEEE COMPUTER SOC*, 9:90-95, 2007.
- [4] S. M. Hussain. Simulation of groundwater flow by the analytic element method, Tese de Doutorado, ICMC/USP, 2017.
- [5] E. Jones, E. Oliphant, P. Peterson, et al. SciPy: Open Source Scientific Tools for Python, 2001. Disponível em <http://www.scipy.org/>. Acesso em 28.fev.2019.
- [6] I. S. P. Marin. Aperfeiçoamento do método de elementos analíticos para simulação de escoamento em rochas porosas fraturadas, Tese de Doutorado, EESC/USP, 2011.
- [7] O. D. L. Strack. Theory and Applications fo the Analytic Element Method, *Reviews of Geophysics*, 41:1-19, 2003. DOI:10.1029/2002RG000111.
- [8] O. D. L. Strack. *Groundwater Mechanics*. Prentice Hall, 1989.
- [9] O. D. L. Strack, H. Haitjema. *Analytic Element Modeling of Groundwater Flow*, Academic Press, 1995.
- [10] O. D. L. Strack. *Analytical Groundwater Mechanics*. Cambridge University Press, 2017.
- [11] O. D. L. Strack, M. F. Alencar Neto, E. Wendland. Teoria e Aplicações do Método de Elementos Analíticos, *RBRH - Revista Brasileira de Recursos Hídricos*, 14:5-15, 2009. DOI: 10.21168/rbrh.v14n3.p5-15.
- [12] S. van der Walt, S. Colbert, G. Varoquaux. The NumPy Array: A Structure for Efficient Numerical Computation, *Computing in Science Engineering*, 13:22-30, 2011.