Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 7, n. 1, 2020.

Trabalho apresentado no XXXIX CNMAC, Uberlândia - MG, 2019.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Uma Extensão do Princípio de Invariância para Sistemas Não Lineares Positivos

Michele Cristina Valentino [1]
Departamento Acadêmico de Matemática, UTFPR, Cornélio Procópio, PR
Luís Fernando Costa Alberto, Yuri Cândido da Silva Ribeiro [2]
Departamento de Engenharia Elétrica, EESC-USP, São Carlos, SP

Resumo. Neste artigo, consideramos a classe de chavamentos *dwell-time* e apresentamos uma extensão do princípio de invariância de LaSalle para a classe de sistemas não lineares positivos. Nesta extensão, a função auxiliar V, a qual desempenha a mesma tarefa que a função de Lyapunov, não é necessariamente positiva e sua derivada ao longo das soluções positivas pode assumir valores positivos em alguns conjuntos. Por esta razão, podemos obter estimativas do atrator e da respectiva área de atração para aqueles sistemas que ainda não possuem uma função de Lyapunov. Um sistema do tipo presa predador é considerado para mostrar a efetividade do resultado principal.

Palavras-chave. Princípio de Invariância, Sistemas Positivos, Atrator, Área de Atração

1 Introdução

Muitos sistemas dinâmicos que modelam problemas práticos de diferentes áreas da ciência e engenharia são positivos, isto é, suas trajetórias permanecem não negativas sempre que a condição inicial é não negativa. Por esta razão, esta classe de sistemas tem atraído a atenção de muitos pesquisadores e, consequentemente, a teoria de estabilidade tem sido significativamente desenvolvida nesta última década.

Uma revisão sobre sistemas positivos e sua estabilidade pode ser encontrada em [1,8,9]. Nos artigos [1,3,9], algumas propriedades do campo vetorial, como por exemplo, cooperatividade, concavidade e homogeneidade são exploradas para obter condições necessárias e suficientes para a estabilidade da classe de sistemas positivos. Alguns resultados de [1,3,7] utilizam o método de Lyapunov para analisar a solução para esta mesma classe de sistema. Uma propriedade chave destes resultados é que a derivada da função de Lyapunov somente deve ser negativa no conjunto $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0,\ 1 \leq i \leq n\}$. Apesar destes importantes avanços, condições menos conservativas que as apresentadas em [7] podem ser obtidas considerando a extensão do princípio de invariância de LaSalle. A extensão do princípio de invariância foi primeiramente obtida para equações diferenciais

[1] valentino@utfpr.edu.br.
[2] lfcalberto@usp.br, yuricandido@gmail.com.

ordinárias [12] e depois foi desenvolvida para sistemas discretos [2], sistemas periódicos [4] e sistemas chaveados [14]. A principal vantagem dessas extensões é que a derivada da função auxiliar pode assumir valores positivos em conjuntos limitados, relaxando a suposição sobre a função de Lyapunov. Mais ainda, explorando essas extensões podemos obter estimativas do atrator e da área de atração, que são uniformes com respeito a lei de chaveamento, incluindo aqueles sistemas que não admitem função de Lyapunov.

Neste artigo, propomos uma extensão do princípio de invariância para uma classe geral de sistemas não lineares positivos. A principal característica desta extensão é que a função escalar auxiliar não precisa ser positiva definida e o conjunto onde sua derivada é positiva deve ser limitado somente em $\mathbb{R}^n_+$.

No decorrer do texto consideramos $int(\mathbb{R}^n_+) = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i > 0,\ 1 \leq i \leq n\}$ e $Bd(\mathbb{R}^n_+) = \mathbb{R}^n_+ - int(\mathbb{R}^n_+)$.

2 Preliminares

Considere o sistema dinâmico autônomo não linear:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \tag{1}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ e f é uma função de classe C^1. A solução de (1) com condição inicial $x(t_0) = x_0$ será denotada por $\varphi(t, x_0)$.

Definição 2.1. *Seja $\varphi(t, x_0)$ a solução de (1) com condição inicial $x(t_0) = x_0$ para todo $t \geq 0$. O conjunto $\omega-$limite de x_0 é o conjunto:*

$$\omega^+(x_0) = \{p \in \mathbb{R}^n : \exists \{t_n\} \text{ com } t_n \to \infty \text{ quando } n \to \infty \text{ tal que } \varphi(t_n, x_0) \to p\}.$$

Em [10] foi demonstrado o seguinte resultado a respeito das propriedades dos conjuntos limite.

Proposição 2.1. *Se a solução $\varphi(t, x_0)$ de (1) é limitada para todo $t \geq 0$, então $\omega^+(x_0)$ é um conjunto não-vazio, compacto, conexo e invariante. Mais ainda, $\varphi(t, x_0)$ é atraída para $\omega^+(x_0)$, isto é*

$$\lim_{t\to\infty} dist(\varphi(t, x_0), \omega^+(x_0)) = 0.$$

Considere as funções de classe C^1, $V, c : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tais que $-\nabla V(x).f(x) \geq c(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e defina o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R}^n : c(x) < 0\}$. Pelos resultados provados em [12], podemos dizer que, se existe um número real $l := \sup_{x\in A} V(x)$ tal que $\overline{\Omega}_l = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq l\}$ é limitado, então toda solução limitada $\varphi(t, x_0)$ de (1) é atraída para B, em que B é o maior conjunto invariante em $\{x \in \mathbb{R}^n : \nabla V(x).f(x) = 0\} \cup \overline{\Omega}_l$. Este resultado é a versão global da extensão do princípio de invariância para a classe de sistemas autônomos não lineares. Na versão local deste resultado, é suposto a existência de um número real $L > 0$ tal que $\Omega_L = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) < L\}$ é limitado. Então, se existe um número real $\widetilde{l}$ tal que $\sup_{x\in\widetilde{A}} V(x) = \widetilde{l} < L$, em que $\widetilde{A} = \{x \in \Omega_L : c(x) < 0\}$, temos que toda solução iniciando em Ω_L é atraída para o maior conjunto invariante em

$\{x \in \Omega_L : c(x) = 0\} \cup \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq \widetilde{l}\}$. Versões uniformes em relação aos parâmetros dos sistemas foram apresentadas em [13].

Na próxima seção, consideramos uma subclasse dos sistemas (1) e apresentamos uma nova extensão do princípio de invariância. A principal característica deste resultado é que o conjunto onde a derivada é positiva deve ser limitado somente em $\mathbb{R}^n_+$ e esta nova propriedade pode facilitar a análise da solução de muitos sistemas, tais como os sistemas biológicos [5, 6], os quais são naturalmente positivos.

3 Um Princípio de Invariância

Agora, consideramos uma subclasse do sistema (1), a classe dos sistemas positivos. O sistema (1) é chamado *positivo* se para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n_+$, a solução $\varphi(t, x_0) \in \mathbb{R}^n_+$ para todo $t \geq 0$. A seguinte condição é necessária e suficiente para o sistema (1) ser positivo:

$$\forall x \in Bd(\mathbb{R}^n_+) : x_i = 0 \Longrightarrow f_i(x) \geq 0.$$

No que segue, apresentamos a versão local da extensão do princípio de invariância para a classe de sistemas considerada neste trabalho.

Teorema 3.1. ***(Princípio de Invariância)*** *Considere o sistema positivo* (1) *e considere* $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *uma função de classe* C^1*. Seja* $L \in \mathbb{R}$ *tal que* $\widetilde{\Omega}_L = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : V(x) \leq L\}$ *seja limitado. Se existe* $\ell \in \mathbb{R}$ *com* $\ell < L$ *tal que* $\ell \geq \sup_{x \in \widetilde{C}} V(x)$ *em que* $\widetilde{C} = \{x \in \widetilde{\Omega}_L : \nabla V(x).f(x) > 0\}$*, então a solução* $\varphi(t, x_0)$ *com* $x_0 \in int(\widetilde{\Omega}_L)$ *é atraída para o maior conjunto invariante em* $\widetilde{E} = \{x \in \widetilde{\Omega}_L : \nabla V(x).f(x) = 0\} \cup \widetilde{\Omega}_\ell$ *em que* $\widetilde{\Omega}_\ell = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : V(x) \leq \ell\}$.

Demonstração. Considere $x_0 \in int(\widetilde{\Omega}_\ell)$ e seja $[0, t_+)$ o intervalo maximal de existência da solução $t \mapsto \varphi(t, x_0)$ do sistema positivo (1). Uma vez que o sistema é positivo, então $\varphi(t, x_0) \in \mathbb{R}^n_+, \forall t \in [0, t_+)$. Primeiramente, consideramos $x_0 \in \widetilde{\Omega}_\ell \subset \widetilde{\Omega}_L$ e supomos a existência de $\bar{t} \in [0, t_+)$ tal que $\varphi(\bar{t}, x_0) \notin \widetilde{\Omega}_\ell$. Pela continuidade de V e devido ao fato de que o sistema é positivo, temos a existência de t^* tal que $V(\varphi(t^*, x_0)) = \ell$ e $V(\varphi(t, x_0)) > \ell$ para todo $t \in (t^*, \bar{t}]$, mas isto é uma contradição $\widetilde{C} \subseteq \widetilde{\Omega}_\ell$. Portanto, a solução $\varphi(t, x_0) \in \widetilde{\Omega}_\ell$ para todo $t \in [0, t_+)$. Uma vez que $\widetilde{\Omega}_\ell$ é um conjunto limitado, então $t_+ = +\infty$ e $\varphi(t, x_0) \in \widetilde{\Omega}_\ell$ para todo $t \geq 0$.
Agora, considere $x_0 \in int(\widetilde{\Omega}_L / \widetilde{\Omega}_\ell)$. Se existe $\bar{t} \in [0, t_+)$ tal que $V(\varphi(\bar{t}, x_0)) \leq \ell$, então o resultado segue da primeira parte desta demonstração. Se $\varphi(t, x_0) \notin \widetilde{\Omega}_\ell$ para todo $t \in [0, t_+)$ e devido ao fato de que $\widetilde{C} \subset \widetilde{\Omega}_\ell$, temos que $V(\varphi(t, x_0)) \leq V(\varphi(0, x_0))$ para todo $t \in [0, t_+)$, isto é, $\varphi(t, x_0) \in \widetilde{\Omega}_L$ para todo $t \in [0, t_+)$. Uma vez que $\widetilde{\Omega}_L$ é um conjunto compacto, então $t_+ = +\infty$ e existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $V(\varphi(t, x_0)) \to r$ quando $t \to +\infty$. Seja $c \in \omega^+(x_0)$, então existe uma sequência $t_n \to \infty$ quando $n \to +\infty$ tal que $\varphi(t_n, x_0) \to c$. Da continuidade de V, temos que $V(\varphi(t_n, x_0)) \to V(c)$. Assim, pela unicidade do limite $V(c) = r$, temos então que $V(x) = r$ para todo $x \in \omega^+(x_0)$ e então $\nabla V(x) \cdot f(x) = 0$ para todo $x \in \omega^+(x_0)$. Portanto, a solução é atraída para o maior conjunto invariante em $\widetilde{E}$. □

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics. v. 7, n. 1, 2020.

Figura 1 mostra a interpretação geométrica do Teorema 3.1 no $\mathbb{R}^2$. Note que, o conjunto $\widetilde{\Omega}_L$ deve ser limitado somente em $\mathbb{R}^2_+$. Assim, a solução $\varphi(t, x_0)$ com $x_0 \in \widetilde{\Omega}_L$ tal que $\varphi(t, x_0) \notin \widetilde{\Omega}_\ell$ para todo $t \geq 0$ é atraída para um conjunto invariante dentro do conjunto onde a derivada da função V é igual a zero (linha preta). A solução $\varphi(t, x_0)$ com $x_0 \in \widetilde{\Omega}_\ell$ é atraída para um conjunto invariante em $\widetilde{\Omega}_\ell$.

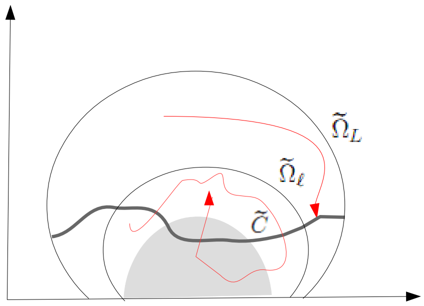

Figura 1: Interpretação Geométrica do Teorema 1

Observação 3.1. *Se $\widetilde{E} = \widetilde{\Omega}_\ell$ no Teorema 3.1, então toda solução $\varphi(t, x_0)$ iniciando em $\widetilde{\Omega}_L$ é atraída para o maior conjunto invariante em $\widetilde{\Omega}_\ell$. Neste caso, $\widetilde{\Omega}_\ell$ e $\widetilde{\Omega}_L$ são as estimativas do atrator e da área de atração, respectivamente.*

No próximo teorema, apresentamos a versão global do Teorema 3.1.

Teorema 3.2. ***(Versão Global)*** *Considere o sistema positivo* (1)*, $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e seja $\widetilde{C} = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : \nabla V(x).f(x) > 0\}$. Se existe $\ell \in \mathbb{R}$ tal que $\ell \geq \sup\limits_{x \in \widetilde{C}} V(x)$, então toda solução limitada $\varphi(t, x_0)$ é atraída para o maior conjunto invariante em $\widetilde{E} := \{x \in \mathbb{R}^n_+ : \nabla V(x).f(x) = 0\} \cup \widetilde{\Omega}_\ell$, em que $\widetilde{\Omega}_\ell = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : V(x) \leq \ell\}$.*

Demonstração. Considere o sistema positivo (1) e a condição inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n_+$. Uma vez que o sistema é positivo, então a solução limitada $\varphi(t, x_0) \in \mathbb{R}^n_+$ para todo $t \in [0, +\infty)$. Primeiramente, consideramos que $x_0 \in \widetilde{\Omega}_\ell \subset \mathbb{R}^n_+$ e supomos a existência de $\bar{t} \in [0, +\infty)$ tal que $\varphi(\bar{t}, x_0) \notin \widetilde{\Omega}_\ell$. Da continuidade de V e devido ao fato do sistema ser positivo, temos a existência de t^* tal que $V(\varphi(t^*, x_0)) = \ell$ e $V(\varphi(t, x_0)) > \ell$ para todo $t \in (t^*, \bar{t}]$, mas isso é uma contradição pois uma vez que $\ell \geq \sup_{x \in \widetilde{C}} V(x)$ e então $\widetilde{C} \subseteq \widetilde{\Omega}_\ell$. Portanto, a solução $\varphi(t, x_0) \in \widetilde{\Omega}_\ell$ para todo $t \geq 0$.
Agora, considere $x_0 \in \mathbb{R}^n_+$ tal que $x_0 \notin \widetilde{\Omega}_\ell$ e suponha que $\varphi(t, x_0)$ é limitado para todo $t \geq 0$. Se existe $\bar{t} \in [0, +\infty)$ tal que $V(\varphi(\bar{t}, x_0)) \leq \ell$, então o resultado segue da primeira parte desta demonstração. Se $\varphi(t, x_0) \notin \widetilde{\Omega}_\ell$ para todo $t \geq 0$, então $V(\varphi(t, x_0)) \leq V(\varphi(0, x_0))$ para todo $t \in [0, +\infty)$, isto é, $t \mapsto V(\varphi(t, x_0))$ é uma função não crescente (pois $\widetilde{C} \subset \widetilde{\Omega}_\ell$) e limitada inferiormente (pois $\varphi(t, x_0)$ é limitada). Logo, existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $V(\varphi(t, x_0)) \to r$ quando $t \to +\infty$. Seja $c \in \omega^+(x_0)$, então existe uma sequência $t_n \to \infty$ quando $n \to +\infty$ tal que $\varphi(t_n, x_0) \to c$ e pela continuidade de V, temos que $V(\varphi(t_n, x_0)) \to V(c)$. Assim, pela unicidade do limite $V(c) = r$, isto é, $V(x) = r$ para todo $x \in \omega^+(x_0)$ e então

$\nabla V(x) \cdot f(x) = 0$ para todo $x \in \omega^+(x_0)$. Portanto, a solução é atraída para um conjunto invariante contido em $\widetilde{E}$. □

Observação 3.2. *O Teorema 3.2 não exige que o conjunto de nível da função V seja limitado, diferente do resultado apresentado em [12, 13]. O Teorema 3.1 somente exige que a intersecção entre o conjunto de nível da função V e $\mathbb{R}^n_+$ seja limitada.*

Corolário 3.1. *Se considerarmos que $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é radialmente ilimitada no Teorema 3.2, então podemos concluir que toda solução $\varphi(t, x_0)$ será atraída para o maior conjunto invariante em $\widetilde{E}$.*

Explorando o fato de que todo conjunto de nível de V é um conjunto limitado (pois V é radialmente ilimitada), então a demonstração do Corolário 3.1 segue as mesmas ideias da demonstração do Teorema 3.2.

Observação 3.3. *Se $\widetilde{E} = \widetilde{\Omega}_\ell$, então toda solução $\varphi(t, x_0)$ é atraída para o maior conjunto invariante em $\widetilde{\Omega}_\ell$. Neste caso, $\widetilde{\Omega}_\ell$ é uma estimativa do atrator do sistema positivo* (1).

Corolário 3.2. *Considere as mesmas suposições do Teorema 3.2 e seja $\widetilde{C} = \bigcup_{i=1}^m \widetilde{C}_i$. Se existe $j \in \{1, ..., m\}$ e $\ell \in \mathbb{R}$ satisfazendo $\widetilde{C}_j \subset \widetilde{\Omega}_\ell$ tal que $\widetilde{\Omega}_\ell$ é limitado e $\widetilde{\Omega}_\ell \cap (\bigcup_{i \neq j}^m \widetilde{C}_i) = \emptyset$, então toda solução $\varphi(t, x_0)$ com $x_0 \in int(\widetilde{\Omega}_\ell)$ á atraída para o maior conjunto invariante contido $\widetilde{\Omega}_\ell$.*

Demonstração. Suponha a existência de $j \in \{1, ..., m\}$ e $\ell \in \mathbb{R}$ satisfazendo $\widetilde{C}_j \subset \widetilde{\Omega}_\ell$. Considere a solução $\varphi(t, x_0)$ com $x_0 \in int(\widetilde{\Omega}_\ell)$, então a demonstração deste corolário é análoga a primeira parte da demonstração do Teorema 3.1. □

4 Exemplo Numérico

Considere o sistema presa predador:

$$\begin{cases} \dot{x} = & -\alpha\beta x + (\beta + \alpha)x^2 - \gamma xy - x^3 \\ \dot{y} = & -\zeta y + xy, \end{cases} \tag{2}$$

com $\alpha = 1, \beta = 3, \zeta = 2.1$ e $\gamma = 0.5$. Como $x = 0$ implica que $f_1(0, y) \geq 0$ e $y = 0$ implica $f_2(x, 0) \geq 0$, podemos concluir que o sistema (2) é positivo. Seus pontos de equilíbrio são $(0, 0), (2.1, 1.98), (1, 0)$ e $(3, 0)$. Escolhendo,

$$\begin{aligned} V(x, y) \;=\; & 18.93(x - 2.1)^4 - 36.34(x - 2.1)^3(y - 1.98) - 31.73(x - 2.1)^3 \\ + \; & 113.7(x - 2.1)^2(y - 1.98)^2 + 363.4(x - 2.1)^2(y - 1.98) + 270.2(x - 2.1)^2 \\ + \; & 63.09(x - 2.1)(y - 1.98)^2 + 102.7(x - 2.1)(y - 1.98) - 0.9347(x - 2.1) \\ + \; & 63.89(y - 1.98)^3 + 138.5(y - 1.98)^2 + 18.43(y - 1.98), \end{aligned} \tag{3}$$

temos que o conjunto onde a derivada desta função assume valores positivos é um conjunto compacto contido em $\mathbb{R}^2_+$ (veja a região pontilhada na Figura 4). Assim, escolhendo

DOI: 10.5540/03.2020.007.01.0457

$\ell = 354.14$ e devido ao fato de que $\widetilde{E} = \widetilde{\Omega}_\ell$, temos pelo Teorema 3.2 que toda solução limitada $\varphi(t, x_0)$ é atraída para o maior conjunto invariante em $\widetilde{\Omega}_\ell$. Portanto, $\widetilde{\Omega}_\ell$ é uma estimativa do atrator do sistema (2). Agora, considerando a componente conexa de $\widetilde{\Omega}_\ell$ com $\ell = 35$ temos, pelo Corolário 3.2, que a solução $\varphi(t, x_0)$ com $x_0 \in int(\Omega_{35})$ é atraída para o conjunto invariante em Ω_{35}, isto é, a solução é atraída para o ponto de equilíbrio $(2.1, 1.98)$ como podemos verificar na Figura 2. Mais ainda, $\varphi(t, x_0)$ com $x_0 \in int(\Omega_{-60})$ á atraída para $(0, 0)$ pelo Corolário 3.2.

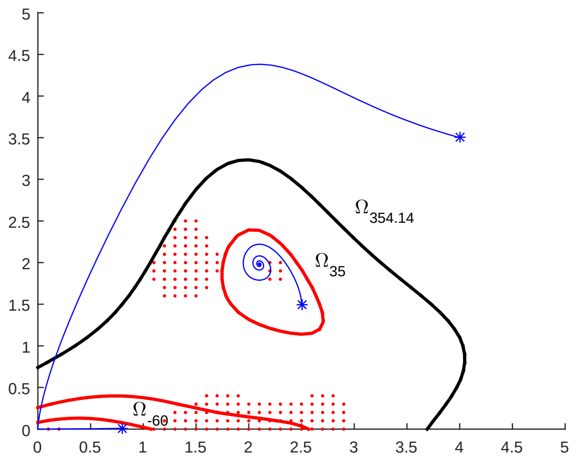

Figura 2: Conjuntos de nível da função V e comportamento assintótico de algumas trajetórias do sistema do exemplo numérico.

É importante ressaltar que o conjunto onde a derivada da função V, a qual foi encontrada utilizando um procedimento apresentado em [11], assume valores positivos é não limitado em $\mathbb{R}^2$. Portanto, o resultado apresentado em [12] não poderia ser utilizado para analisar a solução do sistema (2) explorando a função auxiliar V dada por (3).

5 Conclusão

Neste trabalho foi apresentada uma extensão do princípio de invariância para a classe de sistemas não lineares positivos, a qual é capaz de fornecer estimativas de conjuntos atratores e suas respectivas áreas de atração, mesmo quando a derivada da função auxiliar V assume valores positivos. As versões uniformes dos resultados apresentados aqui, serão apresentadas em trabalhos futuros. O termo uniforme significa que as estimativas do atrator e da área de atração não dependerão dos parâmetros incertos do sistema.

Referências

[1] P. U. Abara. On the stability of positive nonlinear systems: Cooperative and concave system dynamics with applications to distributed networks. Master's thesis,

University of Padova, Italy, 2014.

[2] L. F. C. Alberto, T. R. Calliero, and A. C. P. Martins. An invariance principle for nonlinear discrete autonomous dynamical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(4):692–697, 2007.

[3] T. Chen and X. Liu. μ-stability of nonlinear positive systems with unbounded time-varying delays. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 1(1):1–6, 2016.

[4] W. R. Coimbra and L.F.C. Alberto. A uniform invariance principle for periodic systems with applications to synchronization. *Systems* & *Control Letter*, 97(1):48–54, 2016.

[5] M. Gatto and S. Rinaldi. Stability analysis of predator prey models via the liapunov method. *International Institute for Applied Systems Analysis*, pages 1 – 13, 1975.

[6] R. Genesio, M. Tartaglia, and A. Vicino. On the estimation of asymptotic stability regions: State of the art and new proposals. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 30(8):747 – 755, 1985.

[7] T. Kaczorek. Positivity and stability of discrete-time and continuous-time nonlinear systems. *Przeglad Elektrotechniczny*, 1(8):129–132, 2015.

[8] T Kaczorek. Stability of fractional positive nonlinear systems. *Archives of Control Sciences*, 25(4):491–496, 2015.

[9] P. De Leenheer and D. Aeyels. Stability properties of equilibria of classes of cooperative systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(12):1996–2001, 2001.

[10] Jacob Palis, Jr. and Welington de Melo. *Geometric Theory of Dynamical Systems: an Introduction*. Springer-Verlag, 1982. Translated by: A. K. Manning.

[11] Yuri C. S. Ribeiro. Estimativa da região de estabilidade via funções energia generalizadas. Master's thesis, Escola de Engenharia de Sï¿$\frac{1}{2}$o Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, 2017.

[12] H. M. Rodrigues, L. F. C Alberto, and N. G. Bretas. On the invariance principle. generalizations and applications to synchronism. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 47(5):730–739, 2000.

[13] H.M. Rodrigues, L.F.C. Alberto, and N.G. Bretas. Uniform invariance principle and synchronization. robustness with respect to parameter variation. *Journal of Differential Equations*, 169(1):228 – 254, 2001.

[14] M.C. Valentino, V. A. Oliveira, L.F.C. Alberto, and D. A. Sant Anna. An extension of the invariance principle for dwell-time switched nonlinear systems. *Systems* & *Control Letter*, 61(1):580–586, 2012.

