Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 2, N. 1, 2014.
Trabalho apresentado no CMAC-Sul, Curitiba-PR, 2014.

Modelo Logístico de Verhulst e Métodos Numéricos na Análise do Censo Populacional Mundial

Daniel da Silva Rodrigues* **Eliete Biasotto Hauser**

Faculdade Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, FAMAT, PUCRS.
Av. Ipiranga, 6681 - Partenon, Porto Alegre - RS, 91530-000, Campos Central.
E-mail: daniel.rodrigues.001@acad.pucrs.br
E-mail: eliete@pucrs.br

RESUMO

O presente trabalho tem por objetivo estudar o crescimento populacional mundial. Esse crescimento inicialmente é da forma exponencial e supomos que a população poderá crescer tendendo a um limite máximo (recursos limitados). Esse limite máximo é denominado capacidade suporte.

Consideramos o modelo logístico, usado para simular o crecimento populacional, expresso pelo Problema de Valor Inicial (PVI):

$$\begin{cases} \dfrac{dP(t)}{dt} = r\,P(t)\left(1 - \dfrac{P(t)}{K}\right) \\ P(0) = P_O = 2{,}518629 \end{cases} \tag{1}$$

onde $P(t)$ é a população mundial no tempo t (em bilhões de habitantes) e, de acordo com [3], usamos, $r = 0{,}026$ como taxa de crescimento máximo sob condições limitadas e $K=12$ bilhões é a capacidade de suporte.

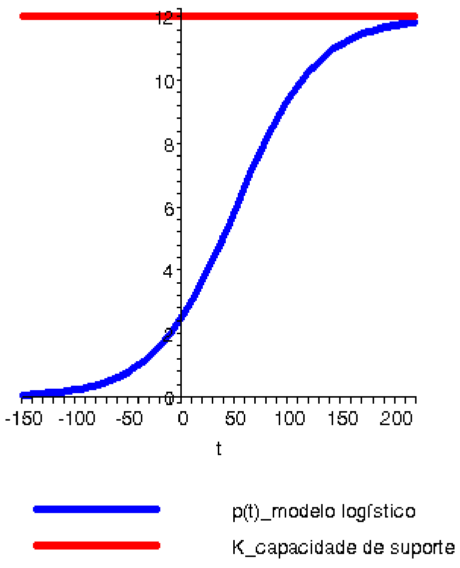
A solução analítica do PVI (1) é dada por:

$$\mathrm{P(t)} = \frac{K}{1 + Ae^{-rt}} \tag{2}$$

onde,

$$\mathrm{A} = \frac{K - P_O}{P_O}, \tag{3}$$

e está representada graficamente na figura a seguir:



*Bolsista de Iniciação Cientifica BPA/PUCRS

Estimativas numéricas da solução do PVI foram obtidas via simulação computacional dos métodos de Euler e de Runge-Kutta, por meio do software Visual Cálculo Numérico (VCN).

Nas tabelas 1 e 2 apresentamos as estimativas obtidas pela implementação dos métodos numéricos, a solução exata do modelo logístico e os dados do censo populacional mundial.

Ano	t_k	p_k (Método de Euler)			Solução Exata (2)	Censo Populacional Mundial
		h=10	h=5	h=1		
1950	0	2, 518629	2, 518629	2, 518629	2, 518629	2, 518629
1960	10	3, 036030	3, 054818	3, 070746	3, 074856	3, 021 475
1970	20	3, 625686	3, 664821	3, 697541	3, 705910	3, 692 492
1980	30	4, 283543	4, 342228	4, 390405	4, 402590	4, 434 682
1990	40	4, 999708	5, 074217	5, 134013	5, 148934	5, 263 593
2000	50	5, 758028	5, 841713	5, 907098	5, 923161	6, 070 581

Tabela 1. População Mundial e estimativas via método de Euler

Ano	t_k	p_k (Método de Runge-Kutta)			Solução Exata (2)	Censo Populacional Mundial
		h=10	h=5	h=1		
1950	0	2, 518629	2, 518629	2, 518629	2, 518629	2, 518629
1960	10	3, 074850	3, 074856	3, 074856	3, 074856	3, 021 475
1970	20	3, 705899	3, 705909	3, 705910	3, 705910	3, 692 492
1980	30	4, 402574	4, 402589	4, 402590	4, 402590	4, 434 682
1990	40	5, 148915	5, 148933	5, 148934	5, 148934	5, 263 593
2000	50	5, 923140	5, 923160	5, 923161	5, 923161	6, 070 581

Tabela 2. População Mundial e estimativas via método de Runge-Kutta

Comparados os dados obtidos com os do censo populacional mundial disponibilizados pela Organização das Nações Unidas (ONU), constatamos que nossas estimativas são razoáveis.O maior erro relativo percentual é de aproximadamente 5% obtido para o ano de 2000 com h=10. E, com mesmo passo h=10, de 2.4% quando usamos o método de Runge-Kutta.

Também, usando a equação (2), estimamos que população mundial em 2013 é $P(63) \approx$ 6,929609. Comparando com o valor atual 7,146543 ,disponível em [4], o desvio relativo percentual é de aproximadamente 3,03 %.

Palavras Chave: *Método de Euler, Método de Runge-Kutta, ModeloLogístico*

Referências

[1] W. E. Boyce e R. C. Diprima, ´´ Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno``, Rio de Janeiro. LTC, 2006,pagina 236-246

[2] R. L. Burden e J. D. Faires, ´´ Análise Numérica``, São Paulo. Thomson, 2003.

[3] S. C. Chapra e R.P. Canale, ´´ Métodos Numéricos para a Engenharia``, São Paulo.McGraw-Hill, 2005.

*Bolsista de Iniciação Cientifica BPA/PUCRS

[4] L.V. Fausett, ´´Aplied Numerical Analysis Using Matlab``, Nem Jerjey. Prentice Hall, 1999.

[5] A. Gilat e V.Subramaniam, ´´Métodos Numéricos para Engenheiros e Cientistas``, São Paulo. Bookman, 2008.

[6] http://www.unfpa.org.br/populationcounter.htm, acessado em 19/09/2013.

[7] R.C.Bassanezi e W.C.Ferreira Jr,´´Equações Diferenciais com Aplicações``,São Paulo.Harbra,1988.

[8] R.C.Bassanezi,´´ensino-aprendizagem com modelagem matemática``,São Paulo.Contexto, 2011,pp. 333-340

*Bolsista de Iniciação Cientifica BPA/PUCRS

