Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Fractais no Tratamento de Imagens Digitais

Laís Fernandes Mucheroni[1]
Unesp - Bauru
Tatiana Miguel Rodrigues de Souza [2]
Unesp - Bauru

Resumo. Na geometria Euclidiana sabemos que um ponto tem dimensão 0, uma reta tem dimensão 1, um plano tem dimensão 2 e um cubo tem dimensão 3. Porém, existem outras geometrias, como a geometria fractal, na qual encontramos objetos matemáticos que possuem dimensão fracionária. Esses objetos são denominados fractais, cujo nome vem do verbo *frangere*, em latim, que significa quebrar, fragmentar.

Neste trabalho apresentaremos o conceito de dimensão de Hausdorff, estabelecendo uma relação entre fractais e o processamento de imagens digitais, mais especificamente, o meio-tom digital.

Palavras-chave. Fractais, Dimensão de Hausdorff, Meio-tom digital

1 Introdução

Ao pensarmos em dimensão lembramos, primeiramente, da dimensão Euclidiana, a qual origina-se na geometria euclidiana plana descrita nas obras de Euclides. Após a introdução do conceito de sólido, fomos levados a pensar no conceito de terceira dimensão.

O conceito de dimensão na Geometria Euclidiana relaciona os objetos ao espaço no qual estão inseridos. Assim, pontos tem dimensão 0, retas e curvas tem dimensão 1, planos tem dimensão 2, sólidos tem dimensão 3 e por indução podemos generelizar sucessivamente para n dimensões.

Para Euclides todas as formas existentes poderiam ser reduzidas a formas simples como quadrados, circunferências, etc. Porém a Geometria Euclidiana não era suficiente para descrever curvas que preenchiam o espaço. Este foi um problema que preocupou matemáticos como Cantor, Poincaré e Lebesgue, dando início ao surgimento da Topologia.

O conceito de dimensão topológica está relacionado com a forma que um conjunto tem de ocupar o espaço. Em topologia, linhas podem ser transformadas em curvas, círculos em triângulos ou quadrados, objetos que são transformados através de homeomorfismos. Nestes casos suas dimensões topológicas são preservadas.

[1]lais.mucheroni@gmail.com.
[2]tatiana.rodrigues@unesp.br.

Foram surgindo várias noções de dimensão, porém com o propósito de que objetos topologicamente equivalentes tenham a sua dimensão mantida e que seja sempre um número natural.

Contudo, existe uma geometria, na qual encontramos objetos matemáticos que possuem uma dimensão fracionada. Esses objetos são denominados fractais cujo nome vem do verbo frangere, em latim, que significa quebrar, fragmentar. São objetos que apresentam certas características como autosemelhança, podem ser obtidos através de iterações de funções, complexidade entre outros. Essa geometria permite uma integração entre a matemática e diversas áreas, desde ciências naturais à tecnologia.

Com as noções acima apresentadas sobre dimensão não conseguimos uma boa definição para a dimensão dos fractais. Por esse motivo, estudamos a dimensão de Hausdorff.

A aplicação meio-tom digital refere-se a um método de meio-tom digital que utiliza curvas que preenchem o quadrado, neste trabalho será utilizada a curva de Hilbert, para reproduzir imagens monocromáticas. Esse método é aplicado em diversos setores tais como indústria gráfica, impressão de imagens monocromáticas e/ou em cores, reprodução de meio-tom, computação gráfica e ilustração digital.

2 Conceitos Básicos

Para que possamos utilizar o conceito de dimensão de Hausdorff serão necessárias as seguintes definições e resultados (foram usados os textos [3], [1] e [2]).

Inicialmente, vamos criar uma noção intuitiva do conceito de dimensão de Hausdorff (essa dimensão também é conhecimda como dimensão fractal). Para isso, vamos explorar o conceito de dimensão de objetos através de subdivisões destes.

Denotaremos por N o número de partes que o objeto foi dividido e r o fator de redução. Assim, a dimensão D de um objeto da Geometria Euclidiana pode ser verificada pela seguinte relação:

$$N = \frac{1}{r^D}.$$

Suponhamos um segmento de reta e o dividimos em três partes iguais. Assim, cada parte será $\frac{1}{3}$ do segmento inicial. Nesse caso temos $N = 3$ e $r = \frac{1}{3}$. Utilizado a relação acima, obtemos:

$$3 = \frac{1}{(\frac{1}{3})^1}.$$

Portanto, a dimensão de um segmento é $D = 1$, o que é válido na geometria euclidiana.

Agora, suponhamos um quadrado e o dividimos em 9 quadrados menores de lado $\frac{1}{3}$ do inicial. Assim, $N = 9$ e $r = \frac{1}{3}$. Pela mesma relação, temos:

$$9 = \frac{1}{(\frac{1}{3})^2}.$$

Portanto, a dimensão do quadrado é $D = 2$, o que também é válido na geometria euclidiana.

Se tivermos um cubo e o dividimos em 27 cubos cujas arestas valem $\frac{1}{3}$ da inicial. Assim, $N = 27$ e $r = \frac{1}{3}$. Pela mesma relação, temos:

$$27 = \frac{1}{(\frac{1}{3})^3}.$$

Portanto, a dimensão do cubo é $D = 3$, o que também é válido na geometria euclidiana.

Esses objetos ocupam totalmente o espaço delimitado pela figura inicial. Porém, veremos posteriormente que um fractal pode ocupar partes ou ultrapassar esse espaço. Assim, intuitivamente, a "dimenso fractal"seria o quanto de espaço um objeto ocupa dentro de onde ele está inserido.

Sabemos que $N = \frac{1}{r^D}$ é equivalente a $N = \left(\frac{1}{r}\right)^D$, assim se aplicarmos logaritmo nos dois lados dessa igualdade obtemos:

$$log(N) = log\left(\frac{1}{r}\right)^D \Rightarrow log(N) = D.log\left(\frac{1}{r}\right) \Rightarrow D = \frac{log(N)}{log(\frac{1}{r})}$$

A dimensão de Hausdorff de um objeto, intuitivamente, é dada por $D = \dfrac{log(N)}{log(\frac{1}{r})}$.

Agora, vamos utilizar, no exemplo abaixo, essa mesma noção para calcular a dimensão de Hausdorff do Conjunto de Cantor.

A partir daqui, veremos algumas definições e resultados para formalizar a definição de dimensão de Hausdorff.

Definição 2.1. *Seja (X, d) um espaço métrico completo. Denotemos por $\mathcal{H}(X)$ o espaço formado por todos os subconjuntos não vazios compactos de X.*

Sejam (X, d) um espaço métrico completo, $x \in X$ e $B \in \mathcal{H}(X)$. Temos que,

$$d(x, B) = \min\{d(x, y); y \in B\}$$

é a distância do ponto x ao conjunto B. Note que, tomamos o mínimo no lugar do ínfimo, pois B é compacto.

Dessa forma, se $A, B \in \mathcal{H}(X)$, defina

$$d(A, B) = \max\{d(x, B)|x \in A\}.$$

Assim, $d(A, B)$ é chamado distância do conjunto A ao conjunto B.

Definição 2.2. *Seja (X, d) um espaço métrico completo. A distância de Hausdorff entre os pontos A e B de $\mathcal{H}(X)$ é definida por*

DOI: 10.5540/03.2020.007.01.0386

$$h(A,B) = d(A,B) \vee d(B,A),$$

onde $x \vee y$ representa o máximo entre x e y.

Observação 2.1. *Sejam $A, B \in \mathcal{H}(X)$. Nem sempre temos $d(A,B) = d(B,A)$. Por exemplo, se $A = \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^* \cup \{0\}\}$ e $B = \{\frac{1}{2}\}$, então, $A, B \in \mathcal{H}(X)$ e temos que:*

$$\begin{aligned} d(A,B) &= max\{d(x,B); x \in A\} = max\{min\{d(x,y); y \in B\}; x \in A\} \\ &= max\{d(0,\tfrac{1}{2}), d(1,\tfrac{1}{2}), d(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}), d(\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{2}), ..., d(\tfrac{1}{n},\tfrac{1}{2}), ...\} \\ &= max\{\tfrac{1}{2}, 0, ..., \tfrac{n-2}{2n}, ...\} = \tfrac{1}{2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(B,A) &= max\{d(x,A); x \in B\} = max\{min\{d(x,y); y \in A\}; x \in B\} \\ &= max\{min\{d(\tfrac{1}{2},0), d(\tfrac{1}{2},1), d(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}), ..., d(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{n}), ...\}\} \\ &= max\{0\} = 0. \end{aligned}$$

Assim, $d(A,B) \neq d(B,A)$.

Definição 2.3. *Sejam (X,d) um espaço métrico completo, $A \in \mathcal{H}(X)$ e $\epsilon > 0$. Defina $\mathcal{N}(A,\epsilon)$ como sendo o menor número de bolas fechadas de raio ϵ necessárias para cobrir o conjunto A. Isto é, $\mathcal{N}(A,\epsilon)$ é o menor inteiro positivo M tal que $A \subset \bigcup_{n=1}^{M} B(x_n,\epsilon)$, para algum conjunto de pontos distintos $\{x_n; n = 1, 2, ..., M\} \subset X$.*

Definição 2.4. *Seja $A \in \mathcal{H}(X)$, onde (X,d) é um espaço métrico. Se*

$$D = \lim_{\epsilon \to 0} \left\{ \frac{ln(\mathcal{N}(A,\epsilon))}{ln(\frac{1}{\epsilon})} \right\},$$

existe, então D é chamada dimensão de Hausdorff ou dimensão fractal de A.

Agora, vamos analisar o fractal que será utilizado na próxima seção para a aplicação: a Curva de Hilbert.

Curvas que preenchem o espaço foram descobertas por Peano que introduziu uma aplicação do intervalo unitário em um quadrado de lado 1. Hilbert generalizou esse processo. A curva que leva seu nome é construída a partir de um processo recursivo. Considere um quadrado de lado 1 dividido em quatro quadrados de lados iguais. Conecte os centros destes quadrados por um segmento de reta (Figura 1(a)). Agora a partir dos quatro quadradros divida-os em quatro novamente. Os centros destes novos quadrados são conectados como na etapa anterior. Observe que estes centros são conectados de modo que não tenha autointersecção na curva. Note que este processo obriga que no quadrado do canto

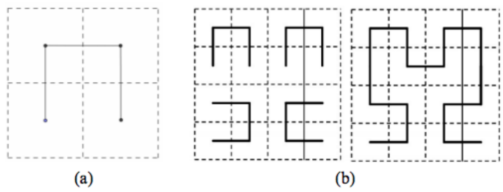

Figura 1: Figura geradora da Curva de Hilbert

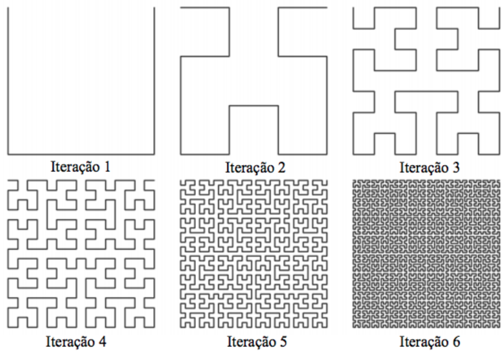

Figura 2: Processo Recursivo

esquerdo inferior se tenha sempre uma rotação da curva do nível anterior de 90^0 para a direita e ao passar para o quadrado de cima rotacione de 90^0 para esquerda o debaixo, faça uma simetria reflexional dos quadrados da esquerda (Figura 1(b)). Este processo é repetido indefinidamente para a obtenção da curva fractal de Hilbert.

Seguindo as ideias de Peano e de Hilbert, muitas outras curvas que preenchem o espaço foram propostas. Estas podem ser classificadas em dois tipos: curvas recursivas que preenchem o espaço e as não recursivas que preenchem o espaço.

A dimensão de Hausdorff da Curva de Hilbert é $D = \left(\frac{\log 9}{\log 3}\right) = 2$, exatamente por preencher totalmente o quadrado unitário e será esta curva recursiva que usaremos abaixo na aplicação da geometria fractal.

3 Meio-tom digital

A técnica de meio-tom digital, ou *halftoning*, é uma técnica utilizada na simulação de imagens com mais de um tom. Devido a fatores econômicos, essa tcnica desempenha um papel especialmente importante na indústria tipográfica, pois permite reduzir o número de cores utilizadas.

Algumas técnicas clássicas de meio-tom, como meio-tom ordenado, difusão de erro, e difusão de ponto introduzem elementos nas imagens geradas. Um aspecto importante é a diferença de intensidade entre a imagem original e a correspondente em meio-tom, quando as imagens são impressas, ficando mais evidente quando se recorre a dispositivos de impressão de alta resolução. A motivação para o desenvolvimento destas técnicas foi a grande quantidade de dispositivos gráficos de baixa qualidade.

Várias técnicas de meio-tom foram desenvolvidas com o objetivo de minimizar os elementos inseridos nas imagens finais, melhorando assim a imagem obtida. Uma das técnicas é a do varrimento ordenado, em que a imagem é varrida agregando os valores da curva de preechimento.

O varrimento ordenado é uma das abordagens mais utilizadas, e baseia-se na construção de um *grid* composto por células. Nesse modelo, cada célula é representada por uma matriz D, em que cada elemento da célula representa um valor de referência em relação a imagem.

Quando a intensidade do pixel na imagem original é superior a definida para o mesmo *pixel* da matriz D, o algoritmo coloca um ponto preto na imagem final, caso contrário, um ponto branco é armazenado. Esse procedimento é realizado para todos os valores da matriz e seus respectivos pontos, seguindo para a próxima matriz até o *grid* estar totalmente preenchido.

Uma curva que preenche um quadrado é uma curva que visita pelo menos uma vez todos os pontos de uma área. Transpondo esse conceito para as técnicas de meio-tom, temos uma ferramenta muito útil, que permite a extração da informação de cada pixel armazenado em uma região. Entre as curvas que preenchem o quadrado, a curva de Hilbert é uma das alternativas mais adequadas a esse processo.

Considerando a imagem ilustrada na Figura 3, é realizada uma divisão em *grids* de *pixels*. A medida que a curva avança ao longo dessa imagem, são obtidos os valores de intensidade dos *pixels* visitados, formando a matriz $I(P)$ com esses dados.

Em seguida, a matriz $I(P)$, que representa a intensidade dos *pixels*, é comparada com a matriz D, gerando a matriz $I(P^{'})$, cujos elementos assumem valores 0 ou 1, de acordo com intensidade menor ou maior que o valor referência da matriz D.

Por exemplo, $6/256 < 0.49$, logo o valor correspondente na matriz $I(P^{'})$ é 0. Por outro lado, se $168/256 > 0.51$, o resultado correspondente na matriz $I(P^{'})$ é 1. Assim, a figura é gerada a partir dos valores de $I(P^{'})$.

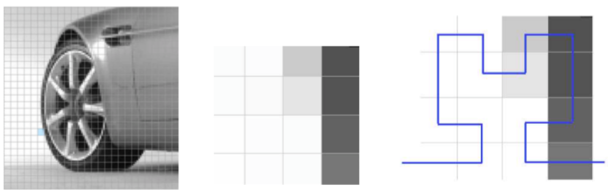

Figura 3: Processo de ampliação.

$$I(P) = \begin{pmatrix} 6/256 & 4/256 & 50/256 & 175/256 \\ 5/256 & 5/256 & 29/256 & 173/256 \\ 4/256 & 4/256 & 5/256 & 168/256 \\ 4/256 & 4/256 & 4/256 & 134/256 \end{pmatrix} \qquad I(P^{'}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 256/256 & 0 & 0 \\ 256/256 & 256/256 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quando é visitado um número pré-estabelecido de *pixels*, os quais formam um agregado, é gerado um número N de *pixels* pretos, cuja intensidade é equivalente à intensidade do conjunto de *pixels* na imagem original (Figura 3) e é formada a matriz $I(P^{'})$ cujos valores são 0 ou 1.

Calculemos a intensidade média dos elementos de $I(P)$:

$$\frac{6 \times \frac{4}{256} + 3 \times \frac{5}{256} + \frac{6}{256} + \frac{29}{256} + \frac{50}{256} + \frac{134}{256} + \frac{168}{256} + \frac{173}{256} + \frac{175}{256}}{16} \sim 0,18896$$

Sabendo que a unidade básica de construção para este *grid* de 16 *pixels* é um *pixel* preto que equivale a $\frac{1}{16} = 0,0625$, então o número de *pixels* pretos necessários equivalentes a $I(P)$ é $N = \frac{0,18896}{0,0625} = 3,02336$.

Temos, portanto, um *grid* com 3 *pixels* pretos correspondentes aos 3 primeiros *pixels* do percurso da curva de Hilbert.

Os 3 pontos pretos são incrementados no início do percurso da curva, em particular desta imagem, na próxima região. Já o erro entre o valor real da região cinzenta acumulada e a intensidade de pixels pretos gerados $(3,023363-3 = 0,2336)$ é propagado para a região seguinte.

Esta técnica cria pontos dispersos que são mais evidenciados em regiões com agregações em maiores dimensões. Assim, uma maior definição é obtida em agregações com menores dimensões.

4 Conclusão

O conceito de geometria fractal é muito amplo e engloba noções que a geometria Euclidiana não consegue explicar. A dimensão de Hausdorff, a qual é uma característica dos fractais, é uma ferramenta muito interessante e mais natural para aplicá-la a técnicas que necessitam de objetos não Euclidianos.

Neste trabalho apresentamos um fractal clássico, obtido de modo recursivo, a curva de Hilbert. Esta curva, como vimos, pode ser usada para preencher o espaço e assim ser utilizada em uma técnica para tratamento de imagens digitais. Como trabalho futuro, será analisada a irregularidade desta curva comparada com outras funções.

Referências

[1] M. Barnsley. *Fractals Everywhere.* Academic Press, San Diego, 1988.

[2] K. Falkoner. *Fractal Geometry.* Mathematical Foundations and Applications. John Wiley & Sons Ltd., New York, 1990.

[3] E. L. Lima. *Elementos de Topologia Geral.* SBM, Rio de Janeiro, 2009.

[4] L. Velho and J. M. Gomes. Digital Halftoning with Space Filling Curves, *SIGGRAPH - Computer Graphics*, 25(4), 1996. DOI: 10.1109/ICIP.1996.559554.

DOI: 10.5540/03.2020.007.01.0386