Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 7, n. 1, 2020.

Trabalho apresentado no XXXIX CNMAC, Uberlândia - MG, 2019.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Um novo Corretor para Homogenização via Convergência em Duas Escalas

Marcos P. de Lima [1]
Universidade Federal do Rio Grande do Sul, UFRGS, Porto Alegre, RS
Leslie Darien Pérez-Fernández [2]
Universidade Federal de Pelotas, UFPel, Pelotas, RS
Júlio César Ruiz Claeyssen [3]
Universidade Federal do Rio Grande do Sul, UFRGS, Porto Alegre, RS

Resumo. Modelos envolvendo coeficientes que variam rapidamente com relação à posição são difíceis de resolver tanto analiticamente quanto numericamente. Geralmente, tais modelos são abordados mediante algum método de homogeneização matemática. Este trabalho apresenta o chamado método de convergência em duas escalas (MCDE) e discute o resultado de corretor correspondente, o qual fornece a justificativa matemática do método. Especificamente, é estudado um problema para a equação elíptica multidimensional e uma nova função corretora é apresentada para garantir que a solução assintótica fornecida pelo MCDE satisfaça exatamente as condições de contorno e convirga fortemente na norma do espaço em que a solução exata pertence.

Palavras-chave. Resultado de corretor, Homogeneização, Método de Convergência em Duas Escalas

1 Introdução

Geralmente, os fenômenos físicos associados às propriedades de meios micro-heterogêneos ocorrem na “microescala”. Assume-se que o comprimento característico l desta escala “microscópica” (aquela em que os domínios estão distribuídos, ou seja, em que ocorre a heterogeneidade) é muito maior que aquele da escala molecular, mas muito menor que o comprimento L característico da escala macroscópica, $l \ll L$. Em tais situações, dizemos que o meio heterogêneo apresenta separação das escalas estruturais (caracterizada pelo parâmetro geométrico $\varepsilon = l/L,\ 0 < \varepsilon \ll 1$), que suas propriedades apresentam variação rápida com relação à posição e que cumpre a hipótese do contínuo, ou seja, ele pode ser visto como um contínuo na escala microscópica e, portanto, o meio pode ser idealizado como sendo efetivamente ou equivalentemente homogêneo e o problema submetido a ação de influências externas pode ser resolvido usando propriedades médias associadas, também

[1]marcos.lima@mat.ufrgs.br
[2]leslie.fernandez@ufpel.edu.br
[3]julio@mat.ufrgs.br

chamadas de *efetivas* ou *macroscópicas*, à escala ε. Mais precisamente, a hipótese de homogeneidade equivalente estabelece que, na macroescala, o meio heterogêneo é fisicamente equivalente a certo meio homogêneo ideal, de maneira que as propriedades efetivas do primeiro são as propriedades do segundo [4]. Por propriedades efetivas ou macroscópicas, se quer dizer uma medida média da propriedade do meio, levando em conta as propriedades físicas e geométricas do meio heterogêneo e sua interação [2]. O processo do qual se obtém o comportamento efetivo do meio heterogêneo, chama-se homogeneização. Em particular, meio periódico é aquele no qual a heterogeneidade pode ser reproduzida mediante a replicação periódica de um elemento recorrente, chamado de célula básica.

Para obter problemas mais simples de serem resolvidos, no contexto apresentado, normalmente se utilizam de técnicas de homogeneização. Matematicamente, homogeneização é a obtenção, a partir de um problema com coeficientes rapidamente oscilantes (chamado problema original), de um problema com coeficientes constantes (chamado problema homogeneizado), equivalente ao original em certo sentido.. Para entender este processo, precisamos entender o que é convergência de operadores. Para isso, considere uma sequência de equações da forma

$$A^\varepsilon u^\varepsilon = f \tag{1}$$

com solução u^ε pertencente a algum espaço de função X. Para uma sequência de operadores A^ε, obtemos uma sequência correspondente de soluções u^ε para estas equações. Se olharmos de um ângulo diferente, isto significa que temos uma sequência de operadores A^ε que determina uma sequência de funções u^ε tal que a mesma imagem f é obtida. Se a sequência $\{u^\varepsilon\}$ tende para um limite $u^0 \in X$, ou seja, se

$$u^\varepsilon \to u^0 \tag{2}$$

em algum sentido razoável, pode-se questionar se existe um operador A^0 que produza a mesma imagem f desta função limite u^0, ou seja, se para algum A^0

$$A^0 u^0 = f. \tag{3}$$

Se este é o caso com o mesmo A^0 para qualquer f definida, A^0 poderia ser visto como o limite de $\{A^\varepsilon\}$ em relação a capacidade de transformar funções em X, isto é, no sentido de operadores. Ao pesquisar a equação do limite resolvida pela função limite u^0, temos que lidar com dois problemas. A primeira é encontrar condições sob as quais existe um limite A^0, com propriedades tais que (3) tenha uma solução única. A segunda dificuldade é a da determinação de A^0, e tem sido estudada principalmente para problemas periódicos. Além disso, no fim do processo de homogeneização, deve-se provar que a solução do problema original (1) tende para a solução do problema homogeneizado (3), quando $\varepsilon \to 0$, na norma do espaço que elas são procuradas. É este o sentido da palavra "equivalente" do meio homogêneo obtido. Esse último processo constitui a justificativa matemática do processo de homogeneização.

2 Formulação do problema e método de homogeneização

Existem diversos métodos de homogenização, cada um especializado para um tipo de problema, periódico, aleatório, deterministíco, etc.. Dentre eles, falaremos do Método de

Convergência em Duas Escalas - MCDE, o qual originalmente foi desenvolvido para problemas em meios multiescala e periódicos [1]. Especificamente, iremos discutir sobre a justificativa matemática do processo de homogenização via MCDE, denominado resultado de corretor. Para fins de desenvolvimento, usaremos a definição clássica de convergência em duas escalas, enunciada em [1]. Antes de enunciá-la, devemos introduzir algumas notações. Consideremos Ω um conjunto aberto, limitado e conexo contido em $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, e $Y = [0,1]^N$ é um cubo de volume unitário, $|Y| = 1$. $L^2(\Omega)$ denota o espaço das funções reais mensuráveis e de quadrado integrável em Ω com respeito a medida de Lebesgue. Denotamos por $C^k_\#(Y)$ o espaço das funções Y-periódicas k-vezes continuamente diferenciáveis em $\mathbb{R}^N$, $0 \leq k \leq \infty$. Então $L^2_\#(Y)$ e $H^1_\#(Y)$ são os fechos, para as normas de $L^2(Y)$ e $H^1(Y)$, respectivamente, de $C^\infty_\#(Y)$. Observe que $L^2_\#(Y)$ coincide com o espaço das funções $L^2(Y)$ extendido por Y-periodicidade para todo o $\mathbb{R}^N$. Agora, considere uma sequência de funções $u^\varepsilon \in L^2(\Omega)$ em que ε é uma sequência de valores reais positivos que converge para zero.

Definição 2.1. *Uma sequência $u^\varepsilon(\boldsymbol{x}) \in L^2(\Omega)$ é dita convergente em duas escalas para um limite $u_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in L^2(\Omega \times Y)$ se, para toda função $\phi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in L^2(\Omega; C_\#(Y))$, tem-se*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega u^\varepsilon(\boldsymbol{x}) \phi^\varepsilon(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = \frac{1}{|Y|} \int_\Omega \int_Y u_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \phi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y} d\boldsymbol{x}. \tag{4}$$

Ocasionalmente, denotamos (4) *como*

$$u^\varepsilon \xrightarrow{2e} u_0.$$

Para entender o MCDE, considere a formulação fraca do problema elíptico linear, N-dimensional, com termo fonte $f(x) \in H^{-1}(\Omega)$, e condições de contorno homogêneas do tipo Dirichet, $u^\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0$:

$$\int_\Omega a_{jl}\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_l} d\boldsymbol{x} = \int_\Omega f(\boldsymbol{x}) v(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}, \quad v \in C^\infty_c(\Omega). \tag{5}$$

Em (5), $C^\infty_c(\Omega)$ é o espaço das funções teste admissíveis que são infinitamente continuamente diferenciáveis e têm suporte compacto. Ainda, adotou-se a notação de Einstein para a soma por índices repetidos com $j, l = 1, 2, \ldots, N$. O método se resume em considerar $\varepsilon \to 0$ e analizar o limite de (5). Para isso, deve-se garantir que todos os termos de (5) convirgam em duas escalas para um certo limite. Através do seguinte teorema [1], são estabelecidos critérios para obter as convergências em duas escalas. Isto é,

Teorema 2.1. *Assuma que a sequência u^ε é limitada em $L^2(\Omega)$ e que $B = \big\{L^2(\Omega; C_\#(Y)), L^2_\#(Y; C(\Omega)), C(\overline{\Omega}; C_\#(Y))\big\}$ é um subespaço separável de $L^2(\Omega \times Y)$ tal que, para qualquer $\phi \in B$,*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left\| \phi\left(\boldsymbol{x}, \frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}\right) \right\|_{L^2(\Omega)} = \left\| \phi\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\right) \right\|_{L^2(\Omega \times Y)} \tag{6}$$

e

$$\left\| \phi\left(\boldsymbol{x}, \frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}\right) \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \left\| \phi\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\right) \right\|_B. \tag{7}$$

Então pode-se extrair uma subsequência convergente para $u_0 \in L^2(\Omega \times Y)$ *que satisfaz* (4) *para todo* $\phi \in B$.

Assumindo o coeficiente $a_{ij}(\boldsymbol{x}/\varepsilon) = a_{ij}(\boldsymbol{y})$, positivo, limitado e ε-periódico, $\forall i, j = 1, \ldots, N$, obtemos a seguinte estimativa [3] para solução

$$\|u^\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}, \tag{8}$$

ou seja, u^ε e seu gradiente ∇u^ε são limitados na norma de $L^2(\Omega)$ por uma constante que independe do parâmetro ε. Logo, pelo Teorema 2.1, podemos dizer que existe uma subsequência u^{ε_k} e ∇u^{ε_k} que converge em duas escalas para $u_0(\boldsymbol{x}) \in L^2(\Omega)$ e $\nabla_x u_0 + \nabla_y u_1$, $u_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in L^2(\Omega; H^1_\#(Y)/\mathbb{R})$ [4], respectivamente. Ao assumir $v(\boldsymbol{x}) = v_0(\boldsymbol{x}) + \varepsilon v_1\left(\boldsymbol{x}, \dfrac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}\right)$ em (5), $v_0 \in C_c^\infty(\Omega)$, $v_1 \in C_c^\infty(\Omega; C^\infty_\#(Y))$, e fazer $\varepsilon_k \to 0$, segue o limite em duas escalas

$$\frac{1}{|Y|}\int_\Omega\int_Y a_{jl}(\boldsymbol{y})\left(\frac{\partial u_0}{\partial x_j} + \frac{\partial u_1}{\partial y_j}\right)\left(\frac{\partial v_0}{\partial x_l} + \frac{\partial v_1}{\partial y_l}\right) d\boldsymbol{y}d\boldsymbol{x} = \int_\Omega f(\boldsymbol{x})v_0(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}, \quad v \in C_c^\infty(\Omega). \tag{9}$$

Considerando $u_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = N_p(\boldsymbol{y})\dfrac{\partial u_0}{\partial x_p}$, $p = 1, \ldots, N$, desacoplam-se a partir da formulação limite (9) os chamados problemas local e homogeneizado, respectivamente:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial y_j}\left(a_{jp}(\boldsymbol{y}) + a_{jl}(\boldsymbol{y})\dfrac{\partial N_p}{\partial y_l}\right) = 0, \quad \boldsymbol{y} \in Y, \\ \langle N_p(\boldsymbol{y})\rangle = 0, \end{cases} \tag{10}$$

e

$$\begin{cases} \hat{a}_{jp}\dfrac{\partial^2 u_0}{\partial x_j \partial x_p} = f(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \\ u_0|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{11}$$

em que $\hat{a}_{jp}$ são os chamados coeficientes efetivos dados por

$$\hat{a}_{jp} = \frac{1}{|Y|}\int_Y \left(a_{jp}(\boldsymbol{y}) + a_{jl}(\boldsymbol{y})\frac{\partial N_p}{\partial y_l}\right) d\boldsymbol{y}. \tag{12}$$

Através do Teorema de Lax-Milgram garantimos a existência e unidade da formulação (9) o que implica que não apenas uma subsequência converge para os limites u_0 e $\nabla_x u_0 + \nabla_y u_1$, senão toda sequência. Nos trabalhos pioneiros do MCDE, a prova do resultado de corretor busca garantir a convergência forte da solução u^ε do problema original para a solução u_0 do problema homogeneizado na norma do espaço a que elas pertencem, ou seja, em $H_0^1(\Omega)$. Porém, só há a convergência fraca de u^ε para u_0. Normalmente, para obter uma convergência forte deve-se acrescentar un termo da forma $\theta^\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \varepsilon u_1\left(\boldsymbol{x}, \dfrac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}\right)$ ao u_0, chamado *corretor*. Porém a função $u_0 + \varepsilon u_1$ não satisfaz a mesma condição de

[4] $H^1_\#(Y)/\mathbb{R} = \left\{u \in H^1_\#(Y) \ : \ u - v = c, \ c \in \mathbb{R}, \ \forall v \in H^1_\#(Y)\right\}$. Em particular, consideramos funções de média integral nula, isto é, $\langle u\rangle = \dfrac{1}{|Y|}\displaystyle\int_Y u d\boldsymbol{y} = 0$.

contorno que u^ε, e disso, portanto, prova-se o resultado de corretor na norma de $H^1(\Omega)$. A partir disso, propomos um novo corretor $\vartheta^\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \varepsilon(1-\chi(\boldsymbol{x}))u_1\left(\boldsymbol{x}, \dfrac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}\right)$, em que $\chi \in C_c^\infty\left(\Omega \setminus [\delta, L-\delta]^N\right)$, $|\Omega| = L^N$, $0 < \delta \leq \varepsilon \ll L < \infty$, $\chi|_{\partial\Omega} = 1$ é uma função de corte que força a diferença $u^\varepsilon - u_0 - \vartheta^\varepsilon$ satisfazer a condição de contorno. Definimos assim, $\widetilde{u}^{(1)} = u_0(\boldsymbol{x}) + \vartheta^\varepsilon(\boldsymbol{x})$, tal que $\widetilde{u}^{(1)}|_{\partial\Omega} = 0$. Agora, pelo caráter limitado de $a_{ij}(\boldsymbol{y})$, $0 < a^- \leq a_{ij}(\boldsymbol{y}) \leq a^+ < \infty$, $\forall \boldsymbol{y} \in Y$, $\forall i, j = 1, \ldots, N$, observamos que

$$\nabla_x \widetilde{u}^{(1)} = \nabla_x u_0 + (1-\chi)\nabla_y u_1 - \varepsilon \nabla_x(\chi u_1), \tag{13}$$

em que

$$\widetilde{u}^{(1)} \xrightarrow{2e} u_0, \tag{14}$$

e

$$\nabla_x \widetilde{u}^{(1)} \xrightarrow{2e} \nabla_x u_0 + (1-\chi)\nabla_y u_1. \tag{15}$$

Pode-se verificar que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|\nabla_x u^\varepsilon - \nabla_x u_0 - (1-\chi(\boldsymbol{x}))\nabla_y u_1\|_{L^2(\Omega)} = 0, \tag{16}$$

e portanto

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left\|\nabla_x u^\varepsilon - \nabla_x \widetilde{u}^{(1)}\right\|_{L^2(\Omega)} = 0. \tag{17}$$

E por equivalência entre normas, segue

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left\|u^\varepsilon - \widetilde{u}^{(1)}\right\|_{H_0^1(\Omega)} = 0. \tag{18}$$

Esta abordagem se faz relevante, pois demonstra matematicamente que o comportamento assintótico do fenômeno converge em norma para a solução exata. Uma vez que $(u_0 + \varepsilon u_1)|_{\partial\Omega} \neq u^\varepsilon|_{\partial\Omega}$, a nova solução assintótica $\widetilde{u}^{(1)}$ aproxima a solução exata tanto na região limitada pela ε vizinhança do contorno, quanto fora dela. Em geral, podemos obter uma função corretora $\varrho^\varepsilon(x)$ através do problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{jl}\left(\dfrac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}\right)\dfrac{\partial \varrho^\varepsilon}{\partial \boldsymbol{x}_l}\right) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \\ \varrho^\varepsilon|_{\partial\Omega} = -u_1|_{\partial\Omega}. \end{cases} \tag{19}$$

de modo que

$$\widetilde{u}^{(1)} = u_0(\boldsymbol{x}) + \varepsilon\left(u_1\left(\boldsymbol{x}, \frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}\right) + \varrho^\varepsilon(\boldsymbol{x})\right), \tag{20}$$

e $\widetilde{u}^{(1)}|_{\partial\Omega} = u_0|_{\partial\Omega} = 0$. Pela Definição 2.1, a expansão assintótica (20)

$$\widetilde{u}^{(1)} \xrightarrow{2e} u_0, \tag{21}$$

e seu gradiente

$$\nabla_x \widetilde{u}^{(1)} \xrightarrow{2e} \nabla_x u_0 + \nabla_y u_1 + \nabla_y \varrho. \tag{22}$$

Logo obtemos os mesmos resultados (17) e (18). Além disso, usando a mesma função teste $v(\boldsymbol{x})$, o limite em duas escalas de (5), considerando os limites (21) e (22) será

$$\frac{1}{|Y|}\int_{\Omega}\int_{Y} a_{jl}\left(\boldsymbol{y}\right)\left(\frac{\partial u_0}{\partial x_j}+\frac{\partial u_1}{\partial y_j}+\frac{\partial \varrho}{\partial y_j}\right)\left(\frac{\partial v_0}{\partial x_l}+\frac{\partial v_1}{\partial y_l}\right)dyd\boldsymbol{x}=\int_{\Omega} f(\boldsymbol{x})v_0(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}, \qquad (23)$$

em que

$$\frac{\partial}{\partial y_j}\left(a_{jl}\left(\boldsymbol{y}\right)\frac{\partial \varrho}{\partial y_l}\right)=0, \quad \boldsymbol{y}\in Y, \qquad (24)$$

deve ser satisfeita. Neste caso, a função corretora é fornecida a partir do problema (19) e isso nos possibilita obter uma aproximação global da solução e não apenas no interior da região do domínio Ω, como geralmente acontece no processo de homogeneização. Isto é, que a obtenção do corretor, além de possibilitar a justificativa matemática do método de homogeneização, serve, alternativamente, para obter uma boa aproximação da solução exata e que satifaz exatamente as condições de contorno.

3 Conclusões

O desenvolvimento do resultado de corretor tem como intuito no MCDE a justificativa matemática no processo de homogeneização. Porém, o fato da relação $\widetilde{u}^{(1)}$ satisfazer a mesma condição de contorno da solução exata nos motivou a utilizar tal expressão como uma aproximação para a solução exata. A primeira correção $-\varepsilon\chi(\boldsymbol{x})u_1\left(\boldsymbol{x},\frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}\right)$ em $\vartheta^{\varepsilon}(\boldsymbol{x})$ é imposta e reduz a perturbação local no contorno. Por outro lado, a função corretora $\varepsilon\varrho^{\varepsilon}$ fornecida do problema (19) reduz as perturbações globais, isto é, possivelmente, perde-se informação local em $[\delta, L-\delta]^N$. A contribuição de cada função corretora para $|u^{\varepsilon}-\widetilde{u}^{(1)}|$ poderá ser vizualizada via exemplos numéricos.

Referências

[1] G. Allaire. Homogenization and two-scale convergence, *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 23:1482–1518, 1992. DOI: 10.1137/0523084.

[2] R. M. Christensen. *Mechanics of Composite Materials*. Wiley, New York, 1979.

[3] D. Cioranescu and P. Donato. An Introduction to Homogeneization. In *Oxford lecture series in mathematics and its applications*, 17. Oxford University Press, New York, 1999. ISBN: 0-19-856554-2.

[4] G. P. Panasenko. Homogenization for periodic media: from microscale to macroscale,*Physics of Atomic Nuclei*, 71:681–694, 2008. DOI: 10.1134/S106377880804008X.

