

## Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

---

# Derivada sem Limites: O Cálculo Tornado Fácil de Silvanus Thompson

Luis Henrique Pereira <sup>1</sup>

EEB Giovani Pasqualini Faraco, Joinville-SC

Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), UTFPR, Curitiba-PR

Mateus Bernardes <sup>2</sup>

Depto. Acadêmico de Matemática, UTFPR, Curitiba-PR

**Resumo** Este trabalho resgata a ideia apresentada no *best-seller* de Silvanus Thompson, *Calculus Made Easy*, editado pela primeira vez no início do século XX. Neste livro, destinado originalmente a estudantes do ensino médio na Inglaterra, o autor descreve os métodos e conceitos clássicos do Cálculo Diferencial e Integral evitando o uso de limites e, por conseguinte, de sua definição formal. Caracterizado também por apresentar o texto de maneira extremamente bem-humorada, esta obra foi e ainda é, extremamente popular justamente pela tentativa (bem sucedida em muitos casos) de desmistificar o cálculo como um assunto extremamente difícil e meramente formal. Dentro desta perspectiva, sugerimos que a abordagem por ele utilizada represente uma possibilidade para o ensino de uma introdução ao Cálculo no ensino médio como defendido por autores por exemplo, Geraldo Ávila. Ainda que a obra original cubra o conteúdo clássico de diferenciação e integração, o trabalho aqui apresentado está restrito à abordagem proposta para o cálculo diferencial.

**Palavras-chave.** Cálculo Diferencial, Limites, Silvanus Thompson.

## 1 Introdução

A revista *Cálculo* publica mensalmente a partir da edição de número 31 [?], a versão em português do livro de Silvanus Thompson [?] publicado originalmente em 1910, cujo conteúdo tratava de tópicos clássicos do Cálculo Diferencial e Integral para estudantes de Ensino Técnico na Inglaterra. O texto original fez bastante sucesso no decorrer do século XX, ainda que não tratasse estes assuntos com o rigor matemático que a academia vinha cobrando desde o advento da Aritmetização da Análise.

O livro *Calculus Made Easy*, que traduziremos aqui por Cálculo Tornado Fácil (como na revista), é apresentado em capítulos ao longo das edições mensais aos leitores dessa revista. Nestas edições, que são fiéis ao livro original, os principais conceitos e métodos

---

<sup>1</sup>ique.ique@bol.com.br

<sup>2</sup>mbernardes@utfpr.edu.br

do Cálculo são apresentados de forma menos rigorosa, onde as demonstrações são realizadas por aproximações e conjecturas, dando ênfase a uma abordagem mais intuitiva e geométrica do que a formal.

Abrindo mão das definições formais de limite e suas consequências, caminhando na direção contrária ao movimento de Aritmetização da Análise iniciado por Dedekind no século anterior [?, ?], Thompson constrói o seu texto em cima de noções intuitivas como “um pouquinho de”, “graus de pequenez” entre outros. Estes conceitos são apresentados hora geometricamente, hora numericamente, de modo a convencer o leitor de que ele, já tendo contato experimental com estas ideias, pode extrapolar o caso particular para o geral, conseguindo a compreensão intuitiva do conceito.

Com esta característica, o texto de Thompson aponta uma direção a se tomar quando se pensa na possibilidade de abordar, por exemplo, o conceito de derivada e suas aplicações no ensino médio, ideia defendida por autores como Geraldo Ávila e Nilson José Machado [?, ?]. Num artigo publicado no início da década de noventa, o professor Geraldo Ávila, defende que a derivada deva ser inserida no currículo do ensino médio no que diz respeito ao estudo de funções. Nele, defende que não se trata de uma inicialização ao estudo do Cálculo, como se faz nos semestres iniciais da graduação para os cursos de engenharia e ciências exatas, e sim uma apresentação sucinta, sem aprofundamento de definições rigorosas, reforçando mais os conceitos intuitivos do que a formal, baseado em considerações geométricas e aplicações simples e cotidianas como as definições de velocidade média e instantânea, por exemplo.

Ávila elabora de maneira bastante clara sua proposta neste artigo, defendendo que derivada e integral façam parte do currículo do ensino médio, pois são de fundamental importância dentro da ciência moderna. Esta inserção simples e concisa pode ser feita no contexto do ensino das funções, que costuma ser apresentada no primeiro ano do ensino médio, de forma totalmente desassociada da geometria analítica, que só aparecerá no terceiro ano deste ciclo. Atualmente, esses conceitos ainda são ensinados separadamente, carregados de terminologias e notações, de maneiras artificiais e descontextualizadas, tomando bastante tempo e apresentando poucas chances de apreensões significativas.

Outra sugestão daquele autor é introduzir já no ensino fundamental o conteúdo referente a equação da reta, quando o estudante iniciará suas primeiras percepções, construindo vínculos, como por exemplo, entre as retas que passam pela origem do sistema cartesiano com proporcionalidade e regra de três, ou ainda, o coeficiente angular, que tem relação direta com a inclinação da reta. Para ele, proporcionalidade e regra de três deveriam ser retomados na primeira série do ensino médio, afim de mostrar a relação existente de grandezas proporcionais com duas variáveis, uma dependente e outra independente, cujo gráfico é uma reta que passa pela origem, enfatizando-se ainda a possibilidade de translações desta reta, e as relações entre suas equações e parâmetros.

Ainda observa que, para que o estudo das derivadas no ensino médio seja bem sucedido é fundamental a inserção dos conceitos de acréscimos e decréscimos, ou simplesmente incrementos, cuja razão tem a ver com a inclinação da reta que passa por dois pontos quaisquer e, em última análise, ao próprio conceito de derivada.

Dentro desta filosofia, entendemos que a abordagem presente no livro de Silvanus Thompson contempla várias destas características, podendo ser apontado, no mínimo

como um ponto de partida para que se caminhe nesta direção.

## 2 Cálculo Tornado Fácil

Durante o século XIX, discussões da forma como conteúdos matemáticos deveriam ser repassados influenciavam a maneira como esses seriam apresentados em livros didáticos. É na virada do século, que Silvanus Thompson apresenta o livro *Cálculo Tornado Fácil*. Thompson utiliza uma abordagem intuitiva e direta, com a ideia de desmistificar algumas barreiras que os alunos encontravam no aprendizado da disciplina. O livro acaba não sendo reconhecido pela comunidade matemática, pois a obra abdica do rigor e formalismo típicos do Cálculo [?]. Apesar disso, o livro alcançou seguidas reedições, em 1914, 1919, 1945 e em 1998.

O inglês Silvanus Phillips Thompson, nasceu na cidade de York em 1851 e, engenheiro eletricitista de formação, exerceu a presidência da instituição de engenheiros eletricitistas da Inglaterra e tornou-se, em 1891, membro da Royal Society. Também foi diretor e professor do Finsbury Technical College. A grande preocupação de Thompson era com o ensino técnico, pois acreditava que os trabalhadores deveriam ter princípios científicos para trabalhar de forma eficaz e inteligente e assim conseguiriam competir com trabalhadores de outras nações, já que se vivia na época a efervescência das consequências da revolução industrial. Thompson era profícuo palestrante e excelente professor, que empregava uma linguagem clara, intuitiva e divertida, fazendo-se compreender e se tornando bastante popular [?].

*Calculus Made Easy*, cujo subtítulo em inglês é *Being a very-simplest introduction to those beautiful methods of reckoning which are generally called by the terrifying names of the differential and the integral calculus*, despertou o interesse dos alunos no aprendizado do Cálculo e também críticas e desprezo de muitos matemáticos na época devido ao estilo informal e intuitivo em que o livro se apresentava [?]. Entretanto, anos mais tarde, estudiosos e pesquisadores demonstraram interesse na obra de Silvanus Thompson, pois perceberam que o livro se mostrava interessante para os iniciantes no Cálculo. Esse é o caso de Martin Gardner (creditado como co-autor da mais recente reedição [?]), entusiasta, estudioso e personalidade do culto da Matemática recreativa, o qual fez um comparativo da obra de Thompson e os demais livros indicados ao ensino do Cálculo [?].

### 2.1 A derivada segundo Silvanus Thompson

Os dois conceitos chave fundamentais na obra de Thompson [?] são:

1.  $d$ , a que ele atribui o significado de “um poquinho de”, de tal forma que  $dx$  significa um pouquinho de  $x$ . Adverte ainda que este pouquinho de  $x$  pode ser considerado infinitamente pequeno (sem se preocupar em explicar precisamente o que ele quer dizer com este último termo).
2.  $\int$  é chamado de “a soma de”. Ainda que neste trabalho não abordemos este conceito, vale a pena esclarecer que este conceito é central e que  $\int dx$  vai significar aqui a soma de todos os poquinhos de  $x$ .

Em seguida, ele passa a se referir a distintos graus de pequenez, que serão fundamentais nos processos do Cálculo. De maneira mais clara, as pequenas quantidades com que lidamos podem apresentar diferentes graus de pequenez. Um caso familiar é a comparação do minuto em relação à hora. Sabe-se que 1 minuto equivale  $1/60$  de uma hora. Se o segundo for comparado em relação à hora, tem-se que 1 segundo equivale a  $1/60 \cdot 1/60 = 1/3600$  da hora. Essa segunda comparação, do segundo em relação à hora, o autor cita como “segunda ordem de pequenez”. Seguindo no mesmo raciocínio, a comparação entre o minuto e o dia é bastante pequena e menor ainda será a comparação entre o segundo e o dia e assim por diante.

Esta diferença entre os graus de pequenez será fundamental no estabelecimento das derivadas de diversas funções como se verá a seguir, quando se considera, por exemplo, a função  $f(x) = x^2$ . Se a quantidade  $x$  cresce um pouquinho chegando a  $x + dx$ , então o quadrado desta quantidade se altera para:

$$f(x + dx) = x^2 + 2x \cdot dx + (dx)^2. \tag{1}$$

Aqui podemos explorar a ordem de pequenez dos termos presentes na expressão ???. Thompson trata o terceiro termo como desprezível em termos do seu grau de pequenez baseado num argumento empírico muito simples, fazendo apenas variar a fração de  $x$  (fixado) que este  $dx$  (um pouquinho de  $x$ ) representa. Como consequência deste acréscimo a  $x$ , pode se observar numericamente que  $2dx$  é uma fração de  $x$  da mesma ordem de magnitude que  $dx$  é de  $x$ , enquanto que  $(dx)^2$  representa uma fração de  $x^2$  de uma segunda ordem de pequenez em relação às anteriores, como pode ser visto na Tabela ??.

Tabela 1: Graus de pequenez dos termos da expressão ??.

$dx$ como fração de $x$	$2dx$ como fração de $x$	$(dx)^2$ como fração de $x^2$
$1/60$	$2/60$	$1/3.600$
$1/1.000$	$2/1.000$	$1/1.000.000$

O argumento ainda pode ser examinado a partir de um viés geométrico. Considere um quadrado de lado  $x$  e aumente este lado do quadrado de uma fração de  $x$ , chamada aqui de  $dx$ . Quanto menor  $dx$ , mais invisível (e Thompson usa exatamente este termo) é o quadrado de lado  $(dx)^2$  em relação ao quadrado maior, como pode ser visto na sequência disposta na Figura ??.

Com estas considerações iniciais passamos então a comparar as variações relativas de duas variáveis  $x$  e  $y$ , a segunda dependendo funcionalmente da primeira,  $y = f(x)$ , quando a variável independente  $x$  é acrescida de “um pouquinho”. Voltemos ao exemplo inicial, onde  $f(x) = x^2$ . A diferença entre o valor acrescido de  $y$  (devido à variação em  $x$ ) e o seu valor original é:

$$dy = (y + dy) - y = f(x + dx) - f(x) = 2x \cdot dx + (dx)^2. \tag{2}$$

Mas baseado no argumento anterior,  $(dx)^2$  é desprezível, portanto (Thompson não usa o sinal de aproximado e no seu texto não há desconforto nenhum em exibir duas expressões

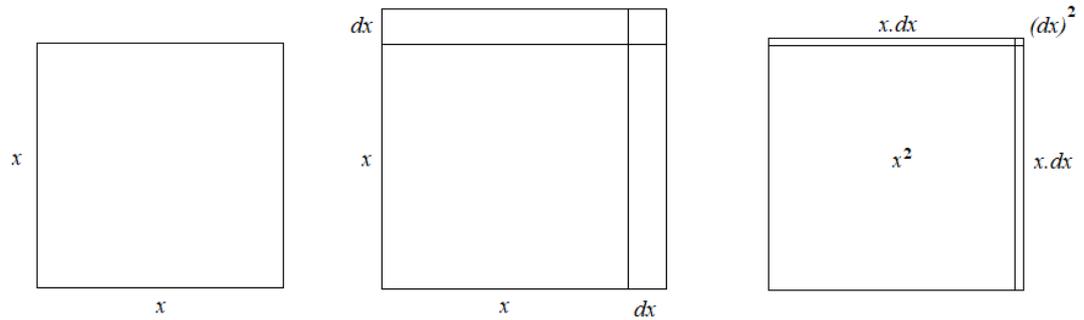


Figura 1: Abordagem geométrica para os diferentes graus de pequenez presentes na expressão 1 (figura adaptada de [?]).

distintas para  $dy$ ):

$$dy = 2x \cdot dx. \tag{3}$$

E então, a razão entre os incrementos é dada por:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x \cdot dx}{dx} = 2x, \tag{4}$$

definida como a derivada da função  $y = x^2$ , que equivale à forma como é obtida esta mesma derivada da maneira clássica, usando limites.

O argumento é estendido a outras funções potências  $x^r$ , e aos poucos as regras de derivação clássicas para soma, produto, quociente e regra da cadeia vão sendo inseridas, assim como derivação sucessiva, interpretação geométrica das derivadas, máximos e mínimos, curvatura, crescimento exponencial, até alcançar derivadas de outras funções elementares tais como as trigonométricas. Todo este caminho é trilhado com a perspectiva da compração de graus de pequenez das grandezas envolvidas, sem usar limites.

## 2.2 Críticas ao trabalho de Silvanus Thompson

Historicamente, Cálculo Tornado Fácil parece não ter sido muito bem aceito pela comunidade matemática, inclusive o próprio autor possivelmente já desconfiava da aceitação que seria advinda da publicação deste livro, preferindo não arriscar sua reputação científica ao optar por assinar a primeira edição (1910) com um pseudônimo [?]. O início do século XX pode ser visto como o da consolidação do movimento de Artimetização da Análise, de tal sorte que a tendência era a comunidade matemática rejeitar trabalhos que não fizessem parte deste esforço histórico iniciado nos séculos anteriores.

Onde estaria o ponto de equilíbrio entre a formalização rigorosa dos aspectos fundamentais do cálculo (derivada e integral) e esta abordagem intuitiva? Em [?] encontramos uma análise extensa da bibliografia tradicional do Cálculo onde parece ser unânime a ideia de que o conceito primordial é o de limite, com sua definição formal através de  $\varepsilon$ 's e  $\delta$ 's.

Além deste detalhe, devemos ressaltar que em alguns casos a proposta de não usar os limites acaba por outro lado exigindo o uso extenso de outras identidades, como por exemplo na dedução das derivadas de seno e cosseno [?]. É o preço que se paga à medida que abre-se mão de uma ferramenta importante.

### 3 Considerações Finais

O ensino de Cálculo tem sido objeto de muito estudos e análises [?, ?, ?], mas estes se debruçam sobre o ensino desta disciplina em nível superior. Ainda que em alguns casos parece haver um movimento que cobre um equilíbrio maior entre a abordagem rigorosa formal e uma abordagem mais intuitiva de seus conceitos fundamentais, não é propósito deste trabalho contribuir para esta discussão. Talvez a questão essencial seja se esta abordagem intuitiva, com apelo a ingredientes geométricos e empíricos-numéricos pretende apenas facilitar o estudo dos conceitos do cálculo, ou pode ser aproveitada para algum objetivo específico.

Desta forma, nossa atenção está voltada para a proposta de ensino de Cálculo para o ensino médio [?, ?]. Para estes autores, neste caso, é claro que aquilo que é chamado de tensão entre rigor e intuição [?] deve pender mais para o lado da intuição do que do rigor formal.

Neste contexto, o Cálculo Tornado Fácil de Silvanus Thompson, ao abrir mão do conceito de limites, introduz os conceitos centrais do Cálculo a partir de ideias intuitivas que serão justificadas com emprego de argumentos geométricos e numéricos.

Longe de sugerir que este livro seja adotado como bibliografia para um curso de Cálculo de nível básico, entendemos que ele pode funcionar como um guia para uma proposta com as características desejadas por Ávila para o ensino de Cálculo de uma forma mais intuitiva, permitindo com que jovens em idade escolar tomem contato com este importante ramo do conhecimento.

### Agradecimentos

Agradecemos à CAPES pela manutenção do programa de Mestrado Profissional em Matemática e também a SBM e UTFPR, instituições responsáveis pela efetivação desse projeto, tão importante para valorização dos professores do ensino básico.

### Referências

- [1] G. Ávila. O ensino do cálculo no segundo grau, *Revista do Professor de Matemática*, n. 18, pages 1–9, 1991.
- [2] C. B. Boyer e U. C. Merzbach. *História da Matemática*, 3a. edição norte-americana, Blucher, São Paulo, 2012.
- [3] H. Eves. *Introdução à História da Matemática*, 5a. edição, Editora da Unicamp, Campinas, 2011.

- [4] A. Lopes, Algumas reflexões sobre a questão do alto índice de reprovação nos cursos de Cálculo da UFRGS *Matemática Universitária*, 26/27, pages 123-146, 1999.
- [5] N. J. Machado. *Cálculo Diferencial e Integral na Escola Básica: Possível e Necessário*. Seminários de Ensino de Matemática. FEUSP [s.n.], 2008.
- [6] G. A. Miranda. Silvanus Phillips Thompson e a desmistificação do cálculo: resgatando uma história esquecida. Dissertação de mestrado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2004.
- [7] G. A. Miranda. O Curioso Caso de Silvanus Phillips Thompson. *Revista Interação*, Ano III, n. 1, pages 59-74, 2009. ISSN: 1981-2183.
- [8] L. H. Pereira. A Derivada Segundo Silvanus Thompson. Dissertação de mestrado, Univ. Tecnológica Federal do Paraná, 2018.
- [9] F. S. Reis. A Tensão entre Rigor e Intuição no Ensino de Cálculo e Análise: A visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos. Tese de doutorado, FE-Unicamp, 2001.
- [10] S. W. Siyepu. An exploration of students' errors in derivatives in a university of technology, *The Journal of Mathematical Behavior*, 32, pages 577-592, 2013.
- [11] S. P. Thompson. Um pouquinho de um pouquinho, *Cálculo: Matemática para todos*, n. 31, pages 22-27, 2013.
- [12] S. P. Thompson e M. Gardner. *Calculus Made Easy*. Macmillan, New York, 1998.