Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 7, n. 1, 2020.

Trabalho apresentado no XXXIX CNMAC, Uberlândia - MG, 2019.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

---

Uma Extensão do Teorema de Markov

Marisa de Souza Costa [1]
Universidade Federal de Uberlândia
Fernando Rodrigo Rafaeli [2]
Universidade Federal de Uberlândia
Kenier Castillo [3]
Universidade de Coimbra

Resumo. Neste trabalho fazemos um estudo da monotonicidade dos zeros de certas famílias de polinômios ortogonais. Mais especificamente mostramos que, sob certas condições, os zeros dos polinômios ortogonais com relação às medidas da forma $d\alpha(x,t) + d\beta(x,t)$, onde $d\alpha(x,t) = \omega(x,t)d\nu(x)$ e $d\beta(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \zeta_i(t)\delta_{y_i(t)}$, apresentam comportamento monotônico com relação ao parâmetro t. Os resultados obtidos são uma extensão daqueles apresentados por Markov em 1986 para polinômios ortogonais associados a uma medida do tipo $d\alpha(x,t) = \omega(x,t)dx$.

Palavras-chave. Polinômios ortogonais, zeros, Teorema de Markov

1 Introdução

Seja $d\mu(x,t)$ uma família de medidas positivas que dependem de um parâmetro $t \in (c,d)$ e considere $\{p_n(x,t)\}$ uma sequência de polinômios ortogonais com relação a $d\mu(x,t)$, ou seja,

$$\int_a^b p_m(x,t)p_n(x,t)d\mu(x,t) = 0, \ m \neq n. \tag{1}$$

Denotamos por $x_k(t)$, $k = 1, \ldots, n$, os zeros de $p_n(x,t)$. A monotonicidade dos zeros de polinômios ortogonais com relação ao parâmetro t é um problema que vem sendo bastante explorado desde o final do século XIX. Markov [7] foi um dos primeiros matemáticos a estudar o comportamento de $x_k(t)$. Em 1886, Markov provou a monotonicidade de $x_k(t)$ com relação ao parâmetro t quando $d\mu(x,t)$ é uma medida absolutamente contínua em (a,b), isto é, $d\mu(x,t) = \omega(x,t)dx$, onde $\omega(x,t)$ é uma função peso suportada em um intervalo (a,b), para todo $t \in (c,d)$. Especificamente, o Teorema de Markov diz o seguinte:

Teorema 1.1. *Seja $\{p_n(x,t)\}$ uma sequência de polinômios ortogonais no intervalo (a,b) com relação a função peso $\omega(x,t)$, isto é,*

$$\int_a^b p_m(x,t)p_n(x,t)\omega(x,t)dx = 0, \ m \neq n. \tag{2}$$

[1] marisasc@ufu.br
[2] rafaeli@ufu.br
[3] kenier@mat.uc.pt

Suponha que $\omega(x,t)$ tenha derivadas parciais de primeira ordem em relação a t contínuas, para todo $x \in (a,b)$ e $t \in (c,d)$, e que as integrais

$$\int_a^b x^k \frac{\partial \omega}{\partial t}(x,t)dx, \quad k = 0, 1, \ldots 2n-1, \tag{3}$$

convirjam uniformemente em cada subintervalo compacto de (c,d). Se

$$\frac{1}{\omega(x,t)} \frac{\partial \omega}{\partial t}(x,t) \tag{4}$$

é uma função crescente (decrescente) de x em (a,b), então os zeros de $p_n(x,t)$ são funções crescentes (decrescentes) de t em (c,d).

Já em 1939, Szegő apresentou em seu livro [8] uma nova demonstração para o Teorema de Markov baseada na quadratura de Gauss. Nos anos seguintes, vários matemáticos deram suas contribuições para o problema da monotonicidade dos zeros de polinômios ortogonais com resultados mais gerais do que o apresentado por Markov (ver [2,4,6], entre outros). Neste trabalho usamos a ideia de Markov para analisar o problema quando a medida em questão pode ser decomposta como uma soma de uma parte contínua $d\alpha(x,t)$ e uma parte discreta $d\beta(x,t)$. Nosso principal resultado será enunciado no Teorema 2.1.

2 Uma extensão do teorema de Markov

Consideremos μ uma medida de Borel positiva, definida em um conjunto compacto $A \subset \mathbb{R}$. Suponha que $d\mu(x,t)$ seja da forma

$$d\alpha(x,t) + d\beta(x,t) \tag{5}$$

com $d\alpha(x,t) := \omega(x,t)d\nu(x)$ e $d\beta(x,t) := \sum_{i=0}^{\infty} \zeta_i(t)\delta_{y_i(t)}$, $t \in B$, onde B é um intervalo aberto de $\mathbb{R}$ e $\delta_{y_i(t)}$ denota a medida de Dirac cujo suporte é o conjunto $\{y_i(t)\}$.

Teorema 2.1. *Seja μ uma medida satisfazendo as hipóteses acima e tal que $(\partial\omega/\partial t)(x,t)$ seja contínua em $A \times B$. Além disso, suponha que*

$$G(t, x_1, \ldots, x_n) := \sum_{i=0}^{\infty} g_i(t, x_1, \ldots, x_n)$$

convirja para $t = t_0$ e que

$$\frac{\partial G}{\partial t}(t, x_1, \ldots, x_n) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\partial g_i}{\partial t}(t, x_1, \ldots, x_n) \quad e \quad \frac{\partial G}{\partial x_j}(t, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(t, x_1, \ldots, x_n)$$

convirjam uniformemente para $t \in B$, onde

$$g_i(t, x_1, \ldots, x_n) = \zeta_i(t)(y_i(t) - x_k)^{-1} \prod_{i=1}^{n} (y_i(t) - x_j)^2$$

e $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$. *Para cada* $k\in\{1,\ldots,n\}$, *seja*

$$d_{k,i}(t) := \begin{cases} y_i(t)-x_k(t) & \text{se } y_i(t)\neq x_k(t),\\ 1 & \text{se } y_i(t)=x_k(t). \end{cases}$$

onde $x_1(t),\ldots,x_n(t)$ *denotam os zeros de* $P_n(x,t)$.

Seja

$$R_{k,i}(t) := \sum_{j=0}^{n}\frac{2-\delta_{j,k}}{y_i(t)-x_j(t)},$$

onde a soma é considerada sobre todos os valores j *e* t *para os quais* $y_i(t)\neq x_j(t)$. *Então* $x_k(t)$ *é uma função estritamente crescente de* t, *para os valores de* t *tais que*

$$\frac{1}{d_{k,i}(t)}\left\{\frac{\zeta_i'(t)}{\zeta_i(t)}+y_i'(t)R_{k,i}(t)-\frac{1}{\omega(x_k(t),t)}\frac{\partial\omega}{\partial t}(x_k(t),t)\right\}\geq 0 \tag{6}$$

e que

$$\frac{1}{\omega(x,t)}\frac{\partial\omega}{\partial t}(x,t) \tag{7}$$

seja uma função crescente de $x\in A$, *desde que a desigualdade* (6) *seja estrita ou a função* (7) *não seja constante em* A.

Demonstração. A prova deste resultado é baseada no Teorema da Função Implícita e é bastante semelhante à prova do Teorema 1.1 apresentada por Markov.

Seja $P_n(x,t)=(x-x_1(t))\ldots(x-x_n(t))$ o n-ésimo polinômio ortogonal com relação à medida (5). Assim, $P_n(x,t)$ satisfaz

$$\int_a^b q(x)P_n(x,t)\omega(x,t)d\nu(x)+\sum_{i=0}^{\infty}\zeta_i(t)q(y_i(t))P_n(y_i(t),t)=0 \tag{8}$$

para todo polinômio $q\in\mathcal{P}_{n-1}=\{a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n \mid a_i\in\mathbb{R}\}$.

Como $P_n(x_k(t),t)=0$ e $(\partial P_n/\partial x)(x_k(t),t)\neq 0$, o Teorema da Função Implícita garante que

$$\frac{dx_k}{dt}(t) = -\frac{\dfrac{\partial P_n}{\partial t}(x_k(t),t)}{\dfrac{\partial P_n}{\partial x}(x_k(t),t)}. \tag{9}$$

Como $q(x)=q(x,\nu)=\dfrac{P_n(x,\nu)}{x-x_k(\nu)}\in\mathcal{P}_{n-1}$, substituindo na derivada da equação (8) e fazendo $\nu\to t$, obtemos

$$\int_a^b\frac{[P_n(x,\nu)]^2}{x-x_k(t)}\frac{\partial\omega}{\partial t}(x,t)d\nu(x)+\sum_{i=0}^{\infty}\{\zeta_i'(t)+\zeta_i(t)y_i'(t)R_{k,i}(t)\}\frac{[P_n(y_i(t),t)]^2}{y_i(t)-x_k(t)}$$
$$+\int\frac{P_n(x,\nu)}{x-x_k(t)}\frac{\partial P_n}{\partial t}(x,t)\omega(x,t)d\nu(x)+\sum_{i=0}^{\infty}\zeta_i(t)\frac{P_n(y_i(t),t)}{y_i(t)-x_k(t)}\frac{\partial P_n}{\partial t}(y_i(t),t)=0. \tag{10}$$

Por outro lado, tomando

$$q(x) = q(x,t) = \left\{ \frac{\partial P_n}{dt}(x,t) - \frac{\partial P_n}{dt}(x_k(t),t) \right\} \frac{1}{x - x_k(t)} \in \mathcal{P}_{n-1},$$

substituindo na expressão (8) e subtraindo de (10), obtemos

$$-\frac{\partial P_n}{\partial t}(x_k(t),t) \left\{ \int \frac{P_n(x,\nu)}{x - x_k(t)} \omega(x,t) d\nu(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \zeta_i(t) \frac{P_n(y_i(t),t)}{y_i(t) - x_k(t)} \right\}$$

$$= \int \frac{[P_n(x,\nu)]^2}{x - x_k(t)} \frac{\partial \omega}{\partial t}(x,t) d\nu(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \{\zeta_i'(t) + \zeta_i(t) y_i'(t) R_{k,i}(t)\} \frac{[P_n(y_i(t),t)]^2}{y_i(t) - x_k(t)}. \tag{11}$$

Considerando agora

$$q(x) = q(x,t) = \frac{\frac{\partial P_n}{\partial x}(x_k(t),t)(x - x_k(t)) - P_n(x,t)}{(x - x_k(t))^2} \in \mathcal{P}_{n-2}$$

na relação de ortogonalidade (8), obtemos

$$\frac{\partial P_n}{\partial x}(x_k(t),t) \left\{ \int \frac{P_n(x,t)}{x - x_k(t)} \omega(x,t) d\nu(x) + \sum_{i=0}^{\infty} \zeta_i(t) \frac{P_n(y_i(t),t)}{y_i(t) - x_k(t)} \right\}$$
$$= \int \frac{[P_n(x,t)]^2}{(x - x_k(t))^2} \omega(x,t) d\nu(x) + \sum_{i=0}^{\infty} \zeta_i(t) \frac{[P_n(y_i(t),t)]^2}{(y_i(t) - x_k(t))^2}. \tag{12}$$

Portanto, substituindo (11) e (12) em (9), obtemos

$$\frac{dx_k}{dt}(t) = \frac{\displaystyle\int \frac{[P_n(x,t)]^2}{x - x_k(t)} \frac{\partial \omega}{\partial t}(x,t) d\nu(x) + \sum_{i=0}^{\infty} \{\zeta_i'(t) + \zeta_i(t) y_i'(t) R_{k,i}(t)\} \frac{[P_n(y_i(t),t)]^2}{y_i(t) - x_k(t)}}{\displaystyle\int \frac{[P_n(x,t)]^2}{(x - x_k(t))^2} \omega(x,t) d\nu(x) + \sum_{i=0}^{\infty} \zeta_i(t) \frac{[P_n(y_i(t),t)]^2}{(y_i(t) - x_k(t))^2}}. \tag{13}$$

Como

$$\frac{1}{\omega(x_k(t),t)} \frac{\partial \omega}{\partial t}(x_k(t),t) \int \frac{[P_n(x,t)]^2}{x - x_k(t)} d\mu(x,t) = 0, \tag{14}$$

podemos subtrair esta expressão do numerador do lado direito de (13). Desta forma,

$$\int \frac{[P_n(x,t)]^2}{x - x_k(t)} \frac{\partial \omega}{\partial t}(x,t) d\nu(x) + \sum_{i=0}^{\infty} \{\zeta_i'(t) + \zeta_i(t) y_i'(t) R_{k,i}(t)\} \frac{[P_n(y_i(t),t)]^2}{y_i(t) - x_k(t)}$$
$$= \int \frac{[P_n(x,t)]^2}{x - x_k(t)} \left(\frac{1}{\omega(x,t)} \frac{\partial \omega}{\partial t}(x,t) - \frac{1}{\omega(x_k(t),t)} \frac{\partial \omega}{\partial t}(x_k(t),t) \right) \omega(x,t) d\nu(x)$$

$$+\sum_{i=1}^{\infty}\left\{\zeta_i'(t)+\zeta_i(t)y_i'(t)R_{k,i}(t)-\frac{\zeta_i(t)}{\omega(x_k(t),t)}\frac{\partial\omega}{\partial t}(x_k(t),t)\right\}\frac{[P_n(y_i(t),t)]^2}{y_i(t)-x_k(t)}. \tag{15}$$

Note que, de acordo com as hipóteses do teorema,

$$\frac{1}{x-x_k(t)}\left(\frac{1}{\omega(x,t)}\frac{\partial\omega}{\partial t}(x,t)-\frac{1}{\omega(x_k(t),t)}\frac{\partial\omega}{\partial t}(x_k(t),t)\right)\geq 0.$$

Vale destacar que, como o denominador do lado direito de (13) é sempre positivo, o sinal de $x_k'(t)$ é o mesmo do numerador da equação. Portanto, o resultado segue de (15). $\square$

3 Caso $d\mu(x,t) = d\alpha(x) + \zeta(t)\delta_y$

Medidas que podem ser decompostas como

$$d\mu(x,t) = d\alpha(x) + \zeta(t)\delta_y \tag{16}$$

são vistas com frequência na literatura (ver [3,5], por exemplo). No trabalho [3] encontramos resultados sobre os zeros de polinômios ortogonais com relação a (16). Apresentamos abaixo um resultado sobre a monotonicidade dos zeros de polinômios ortogonais com relação a uma medida um pouco mais geral do que a medida (16), que é consequência do Teorema 2.1.

Corolário 3.1. *Consideremos uma medida $d\mu(x,t) = d\alpha(x)+\sum_{i=0}^{\infty}\zeta_i(t)\delta_{y_i}$ nas condições do Teorema 2.1. Além disso, suponha que y_i, $i=0,1,\ldots$ são contantes e $\zeta_i'(t)=0$ para $i\neq l$. Consideremos os conjuntos*

$$C_l^- = \{t\in B|\zeta_l'(t)<0\},\quad C_l^+ = \{t\in B|\zeta_l'(t)>0\}.$$

Se $x_k(t) < y_l$ (respectivamente $x_k(t) > y_l$) para todo $t\in B$, então $x_k(t)$ é uma função crescente (respectivamente, decrecente) de t em C_l^+ (respectivamente, em C_l^-). Em outras palavras, cada zero $x_k(t)$ do lado esquerdo de y_l é uma função crescente (decrescente) de t em C_l^+ (C_l^-), enquanto que cada zero $x_k(t)$ do lado direito de y_l é uma função decrescente (crescente) de t em C_l^+ (C_l^-).

Demonstração. Neste caso a equação (13) fica reduzida a

$$\frac{dx_k}{dt}(t)=\frac{\zeta_i'(t)\dfrac{[P_n(y_i(t),t)]^2}{y_l-x_k(t)}}{\displaystyle\int\frac{[P_n(x,t)]^2}{(x-x_k(t))^2}\omega(x,t)d\nu(x)+\sum_{i=0}^{\infty}\zeta_i(t)\frac{[P_n(y_i,t)]^2}{(y_i-x_k(t))^2}}.$$

O resultado segue imediatamente da equação acima. $\square$

Exemplo 3.1. Seja $d\mu(x,t) = dx + \zeta_1\delta_{y_1} + \zeta_2\delta_{y_2} + \zeta_3\delta_{y_3}$, onde $\zeta_1 = \zeta_1(t) = t$, $\zeta_2 = \zeta_3 = 1$, $y_1 = 2$, $y_2 = 5$, e $y_3 = 7$, com $A = (-1,1)$ e $B = (0,\infty)$. Consideremos $\{p_n\}$ a sequência de polinômios ortogonais com relação a $d\mu$, ou seja,

$$\int_{-1}^{1} p_n(x)p_m(x)dx + tp_n(2)p_m(2) + p_n(5)p_m(5) + p_n(7)p_m(7) = 0, \quad m \neq n.$$

Pelo Corolário 3.1, os zeros do polinômio p_n localizados do lado esquerdo de $y_1 = 2$ são funções crescentes de t, enquanto os zeros de p_n do lado direito de $y_1 = 2$ são funções decrescentes de t.

A Tabela 1 mostra a monotonicidade dos zeros de p_4. Observe que dois deles são funções crescentes de t, enquanto os outros são funções decrescentes de t.

Tabela 1: Zeros do polinômio p_4 em função de t.

t	$x_1(t)$	$x_2(t)$	$x_3(t)$	$x_4(t)$
0.0	-0.655077	0.46887	4.98364	6.99699
0.5	-0.528752	1.07504	4.83155	6.97651
1.0	-0.502388	1.33983	4.75758	6.96841
1.5	-0.491188	1.48640	4.71348	6.96408
2.0	-0.485007	1.57951	4.68410	6.96138
2.5	-0.481092	1.64394	4.66310	6.95953
3.0	-0.478390	1.69121	4.64733	6.95820
3.5	-0.476414	1.72736	4.63504	6.95718
4.0	-0.474906	1.75592	4.62520	6.95638
4.5	-0.473717	1.77906	4.61713	6.95574
5.0	-0.472756	1.79818	4.61040	6.95521
5.5	-0.471962	1.81425	4.60470	6.95477
6.0	-0.471297	1.82795	4.59981	6.95439
6.5	-0.470730	1.83977	4.59557	6.95407
7.0	-0.470242	1.85006	4.59185	6.95379
7.5	-0.469817	1.85911	4.58857	6.95354
8.0	-0.469444	1.86713	4.58565	6.95332
8.5	-0.469113	1.87428	4.58304	6.95313
9.0	-0.468819	1.88071	4.58069	6.95295
9.5	-0.468555	1.88651	4.57856	6.95279
10.0	-0.468316	1.89177	4.57662	6.95265

Outros casos particulares do Teorema 2.1 podem ser encontrados em [1].

4 Conclusões

Seguindo os mesmos passos de Markov [7], mostramos que os seus resultados sobre a monotonicidade dos zeros de polinômios ortogonais associados a uma família de medidas de Borel a um parâmetro t podem ser extendidos para casos muito mais gerais, em que as medidas em questão possuem uma parte contínua $d\alpha(x,t) = \omega(x,t)d\nu(x)$ e uma parte discreta com uma infinidade de pontos de massa $d\beta(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \zeta_i(t)\delta_{y_i(t)}$.

Referências

[1] K. Castillo, M. S. Costa and F. R. Rafaeli. On Markov's theorem on zeros of orthogonal polynomials revisited, *Appl. Math. Comput.*, 339: 390–397, 2018.

[2] G. Freud. *Orthogonal Polynomials.* Pergamon Press, Oxford-New York, 1971.

[3] E. J. Huertas and F. Marcellán. Zeros of orthogonal polynomials generated by canonical perturbations of measures, *Appl. Math. Comput.*, 218: 7109–7127, 2012.

[4] M. E. H. Ismail. *Classical and Quantum Orthogonal Polynomials in One Variable*, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, vol. 98, Cambridge University Press, Cambridge, 2005.

[5] T. H. Koornwinder. Orthogonal polynomials with weight function $(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} + M\delta(x+1) + N\delta(x-1)$, *Can. Math. Bull.*, 27: 205–214, 1984.

[6] A. Kroó and F. Peherstorfer. On the zeros of polynomials of minimal L_p norm, *Proc. Amer. Math. Soc.* 101: 652–656, 1987.

[7] A. Markov. Sur les racines de certaines équations (second note), *Math. Ann.* 27: 177–182, 1886.

[8] G. Szegő. *Orthogonal polynomials, 4a. edition*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., Providence, R. I., 1975.

DOI: 10.5540/03.2020.007.01.0458