

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

---

## Generalizações Analíticas da Conectividade Algébrica de um Grafo

Elizandro Max Borba <sup>1</sup>

Universidade Estadual do Rio Grande do Sul

Uwe Schwerdtfeger <sup>2</sup>

Technische Universität Chemnitz, Alemanha

**Resumo.** Neste trabalho, o conceito de  $p$ -autopares do  $q$ -Laplaciano, que generaliza os conceitos usuais de autovalores e autovetores do laplaciano através do uso de normas associadas aos vértices e as arestas do grafo, é aplicado a fim de obter relações com invariantes de um grafo. Essa abordagem permite reescrever resultados de Teoria dos Grafos em uma linguagem analítico-espectral. Em particular, estudamos o segundo menor  $p$ - autovalores do  $q$ -laplaciano, que generaliza a conectividade algébrica, relacionando com invariantes como constante de Cheeger, diâmetro e distância resistiva do grafo.

**Palavras-chave.** Teoria Espectral dos Grafos, Otimização,  $q$ -laplaciano.

### 1 Introdução

É bem sabido que os autovetores da matriz laplaciana  $L = L(G)$  de um grafo  $G = (V, E)$  são obtidos através do quociente de Rayleigh  $R(x) = x^T Lx / \|x\|_2^2$ , onde  $x^T Lx = \sum_{ij \in E} (x_i - x_j)^2$  [7]. Além disso, é possível restringir a busca por pontos críticos à bola unitária  $\{x \in \mathbb{R}^{|V|} : \|x\|_2 = 1\}$ . De fato, o numerador da expressão de  $R(x)$  também é interpretado como uma norma. Denote por  $B$  uma matriz de incidência de  $G$  relativa a uma orientação qualquer, como  $L = B^T B$ ; então que  $x^T Lx = \|Bx\|_2^2$ , de forma que  $R(x) = \|Bx\|_2^2 / \|x\|_2^2$ .

O segundo menor autovalor de  $L$ , chamado de *conectividade algébrica*, bem como o autovetor associado (*vetor de Fiedler*) têm atraído a atenção pelas suas propriedades e por suas aplicações, principalmente a problemas de particionamento e aprendizagem de máquina (ver [7] e suas referências).

Para  $x \in \mathbb{R}^{|V|}$ ,  $p \in [1, \infty]$  e  $q \in [1, \infty)$ , definimos uma generalização do quociente de Rayleigh [3, pg. 16],

$$R_p^q(x) = \frac{\sum_{ij \in E} |x_i - x_j|^q}{\|x\|_p^q} = \left( \frac{\|Bx\|_q}{\|x\|_p} \right)^q,$$

---

<sup>1</sup>elizandro-borba@uergs.edu.br

<sup>2</sup>uwe.schwerdtfeger@mathematik.tu-chemnitz.de

e define-se um funcional associado, denominado de  $q$ -laplaciano. Note que as escolhas de  $p$  e  $q$  acima equivalem à atribuição de uma  $p$ -norma associada aos vértices e uma  $q$ -norma associada às arestas de  $G$ , pois cada entrada de  $x$  e  $Bx$  é associada, respectivamente, a um vértice e uma aresta do grafo. Bühler e Hein [4], assim como Amghibech [1], chamaram de “autovetores” os pontos críticos de  $R_p^p$ , ou seja, o caso em que  $p = q$ , e seguiremos a mesma linha. Em particular, mostraremos que o segundo menor  $p$ -autovalor do  $q$ -laplaciano, que generaliza conectividade algébrica de  $G$ , conforme se altera o valor de  $p$  e  $q$ , se relaciona com diferentes invariantes de um grafo, como constante de Cheeger, diâmetro e distância resistiva.

Por questões de brevidade, várias das provas são omitidas. Ao leitor interessado nos detalhes, bem como em outros resultados utilizando abordagem similar, recomenda-se consultar a fonte [3].

Para  $t \in \mathbb{R}$ , sejam:

$$\text{sign}(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t > 0; \\ -1, & \text{se } t < 0; \\ 0, & \text{se } t = 0. \end{cases} \quad \text{e} \quad \text{Sign}(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t > 0; \\ -1, & \text{se } t < 0; \\ [-1, 1], & \text{se } t = 0. \end{cases}$$

Para  $p \geq 1$ , considere também a função (multivalorada para  $p = 1$ )

$$\phi_p(t) = \begin{cases} |t|^{p-1} \text{sign}(t), & \text{se } p > 1; \\ \text{Sign}(t), & \text{se } p = 1. \end{cases}$$

Observe que  $\phi_2(t) = t$ . Se  $x$  é um vetor, consideramos que as funções  $\text{sign}(x)$ ,  $\text{Sign}(x)$  e  $\phi_p(x)$  são aplicadas por entrada.

Para  $i, j \in V$  ( $i \neq j$ ), a distância usual entre  $i$  e  $j$  é denotada por  $d(i, j)$ , com a convenção de que  $d(i, j) = \infty$  se  $i$  e  $j$  estão em componentes conexas distintas. O diâmetro de  $G$  é  $\text{diam}(G)$  ( $= \infty$  se  $G$  é desconexo). O tamanho de corte do conjunto de vértices  $S \subset V$  é  $\text{cut}(S) = |\{ij \in E : i \in S, j \in \bar{S}\}|$ . O vetor de zeros é  $\mathbf{0}$  e o vetor de uns é  $\mathbf{1}$ . Para uma matriz  $M$ , obtemos  $M_{\bar{S}}$  removendo de  $M$  as linhas e colunas indexadas por  $S$ , e  $M_{\bar{i}}$  removendo de  $M$  a  $i$ -ésima linha e a  $i$ -ésima coluna. Uma convenção análoga é usada para vetores, com os conjuntos no índice se referindo a entradas em vez de linhas e colunas.

## 2 $p$ -autopares do $q$ -laplaciano

Buscamos agora uma função  $L_q : \mathbb{R}^{|V|} \rightarrow \mathbb{R}^{|V|}$  que tenha um papel semelhante ao de  $L$  para compor  $R_p^q(x)$ , ou seja, que tenha a propriedade  $x^T L_q x = \sum_{ij \in E} |x_i - x_j|^q$ .

**Definição 2.1.** *Seja  $G = (V, E)$  um grafo,  $q \in [1, \infty)$  e  $x \in \mathbb{R}^{|V|}$ . O  $q$ -laplaciano  $L_q$  é a função definida por*

$$(L_q x)_i = \sum_{j:ij \in E} \phi_q(x_i - x_j).$$

Essa definição foi introduzida por Amghibech [1]. Observamos que  $L_q$  tem algumas propriedades básicas do  $q$ -laplaciano, que já haviam sido mostradas para  $p = q > 1$  [4]; no entanto, as propriedades abaixo valem para  $p, q \geq 1$ .

**Proposição 2.1.** *Seja  $L_q$  o  $q$ -laplaciano de  $G = (V, E)$ . Então*

- a)  $x^T L_q x = \sum_{ij \in E} |x_i - x_j|^q \geq 0$ ;
- b)  $L_q(x + c\mathbf{1}) = L_q x$  e  $L_q(cx) = \phi(c)L_q x$  para qualquer  $c \in \mathbb{R}$
- c)  $v \in \mathbb{R}^n$  é um ponto crítico de  $R_p^q(x)$  se e somente se  $v$  é um  $p$ -autovetor de  $L_q$  associado ao  $p$ -autovalor  $\lambda = v^T L_q v / \|v\|_p^p$ .
- d) O conjunto dos  $p$ -autovetores de  $L_q$  associados ao  $p$ -autovalor 0 é um espaço vetorial, cuja dimensão é igual ao número de componentes conexas de  $G$ .
- e) para um  $p$ -autovetor  $v$  associado a um  $p$ -autovalor não-nulo de  $L_q$  vale  $\mathbf{0} \in \sum_{i \in V} \phi_p(v_i)$ .

Enfim, introduzimos a definição de  $p$ -autovalores e  $p$ -autovetores do  $q$ -laplaciano.

**Definição 2.2.** *Sejam  $p, q \geq 1$ . Um número real  $\lambda$  é dito um  $p$ -autovalor de  $L_q = L_q(G)$  se existe um vetor real  $v$  tal que  $\mathbf{0} \in L_q v - \lambda \phi_p(v)$ . O vetor  $v$  é então dito um  $p$ -autovetor associado a  $\lambda$ .*

Em outras palavras, existem  $\ell \in L_q v, u \in \phi_p(v)$  tais que  $\ell = \lambda u$ . A condição  $\mathbf{0} \in L_q v - \lambda \phi_p(v)$  é dita a  $(p, q)$ -autoequação de  $L_q$ , e o par  $(\lambda, v)$  é um  $p$ -autopar de  $L_q$ . Se  $p, q > 1$ , esta torna-se  $L_q v = \lambda \phi_p(v)$ .

A questão da multiplicidade de  $p$ -autovalores de  $L_q$  não é trivial, até porque combinações lineares de  $p$ -autovetores não são necessariamente  $p$ -autovetores. Entretanto, garantimos a existência ao menos do segundo menor  $p$ -autovalor de  $L_q$ , pois mostra-se que o conjunto  $\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^{|V|} : \|x\|_p = 1 \text{ e } \sum_{i \in V} \phi_p(x_i) = 0\}$  é compacto [3, Proposição 3.7].

### 3 Conectividade $(p, q)$ -algébrica

Uma extensão da conectividade algébrica é descrita abaixo [3, Definição 5.1].

**Definição 3.1.** *Para  $p \in [1, \infty]$ , a conectividade  $(p, q)$ -algébrica de  $G$ ,  $a_p^q(G)$ , é o segundo menor  $p$ -autovalor de  $L_q$ .*

A obtenção de  $a_p^q(G)$  pode ser formulada de várias maneiras. Uma delas é

$$a_p^q(G) = \min_{\substack{0 \in \sum_i \phi_p(x_i) \\ \|x\|_p = 1}} \sum_{ij \in E} |x_i - x_j|^q. \tag{1}$$

Da discussão da seção anterior, vimos que  $a_p^q(G)$  está bem definido e que  $G$  é conexo se e somente  $a_p^q(G)$  é positivo. Além disso, ao deslocar  $\mathcal{X}$  por  $m\mathbf{1}$  para  $m \in \mathbb{R}$ , a solução de (1) não muda.

### 3.1 Interpretação combinatória e física de $a_\infty^2$

Para  $q > 1$  e  $m \in \mathbb{R}$ , é mostrado em [3, Proposição 5.3] que

$$a_\infty^q(G) = \min_{\substack{i,j \in V \\ i \neq j}} \min_{\substack{x_i = m+1 \\ x_j = m-1}} x^T L_q x. \tag{2}$$

Em particular,  $a_\infty^2(G)$  é o mínimo de um conjunto de  $\binom{|V|}{2}$  problemas quadráticos convexos com restrições lineares, sendo que cada um é resolvido em tempo polinomial ([8, Teorema 4.1]), ou seja,  $a_\infty^2(G)$  é obtido em tempo polinomial. Prova-se também que uma solução ótima  $x$  de (2) possui exatamente uma entrada  $x_a$  tal que  $x_a = m + 1$ , e exatamente uma entrada  $x_b$  tal que  $x_b = m - 1$ ; chamamos  $a$  e  $b$  de *vértices líderes* de  $G$  (em  $x$ ). Conjecturamos que os vértices líderes de  $G$  não são vizinhos, exceto se  $G$  for completo.

Para  $i, j \in V$ , denotamos por  $\mathcal{T}_G(i, j)$  o número de florestas geradoras de  $G$  com exatamente duas árvores  $T_i, T_j$  com  $i \in V(T_i)$  e  $j \in V(T_j)$ , e por  $\mathcal{T}_G$  o número de árvores geradoras de  $G$ . Mostraremos que o valor de  $a_\infty^2(G)$  pode ser interpretado em termos de  $\mathcal{T}_G(i, j)$  e  $\mathcal{T}_G$ . Dessa forma, o Teorema Matriz-Árvore pode ser reescrito como  $\det L_{\bar{i}} = \mathcal{T}_G$  para qualquer  $i \in V$ . Usando uma generalização chamada Teorema Matriz Árvore para Todos os Menores [5], obtemos que, para  $\alpha = \{i, j\} \subset V$ ,

$$\det L_{\bar{\alpha}} = \mathcal{T}_G(i, j). \tag{3}$$

**Lema 3.1.** *Seja  $G$  um grafo conexo. Então  $a_\infty^2(G) = \frac{4\mathcal{T}_G}{\max_{i,j \in V} \mathcal{T}_G(i, j)}$ .*

*Demonstração.* Fixando  $m = 1$  em (2), então  $x_i = 0$  e o segundo mínimo torna-se  $\min x_j = 2x_j^T L_{\bar{i}} x_{\bar{i}}$ , cuja condição de otimalidade é  $2L_{\bar{i}} x_{\bar{i}} = \lambda e_j$ , e multiplicando à esquerda por  $x_{\bar{i}}^T$  obtemos  $\lambda = x^T L x$ . Como  $G$  é conexo,  $\det L_{\bar{i}} = \mathcal{T}_G > 0$ , logo  $L_{\bar{i}}$  é invertível e  $2x_{\bar{i}} = \lambda y$ , onde  $y = L_{\bar{i}}^{-1} e_j$ . Aplicando a Regra de Cramer a  $L_{\bar{i}} y = e_j$  e a (3), obtemos

$$y_j = (L_{\bar{i}}^{-1})_{jj} = \frac{\det L_{\bar{\alpha}}}{\det L_{\bar{i}}} = \frac{\mathcal{T}_G(i, j)}{\mathcal{T}_G}.$$

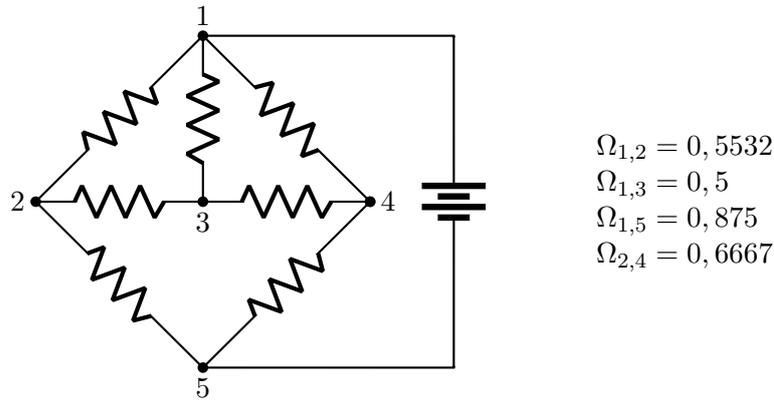
Como  $2x_j = 4 = \lambda y_j$ , temos que  $x^T L x = \lambda = \frac{4}{y_j} = \frac{4\mathcal{T}_G}{\mathcal{T}_G(i, j)}$ . Como o numerador é fixo para  $G$  dado, o mínimo é obtido maximizando-se o denominador.  $\square$

Além disso,  $a_\infty^2(G)$  tem relação com a *distância resistiva*  $\Omega_{ij}$  entre os vértices  $i$  e  $j$  [6]. Nesse contexto,  $G$  representa uma malha elétrica em que cada aresta possui um resistor de 1 ohm,  $\Omega_{ij}$  é definida como a resistência equivalente do circuito ao se aplicar uma diferença de potencial  $i$  e  $j$ , tal como na Figura 1. Para mostrar a conexão de  $a_\infty^2(G)$  com as distâncias resistivas em  $G$ , usamos o resultado abaixo, provado por Bapat et. al. [2]:

**Teorema 3.1.** *Seja  $\alpha = \{i, j\} \subset V$ . Então  $\Omega_{ij} = \frac{\det L_{\bar{\alpha}}}{\det L_{\bar{i}}}$ .*

Obtemos resultado a seguir segue diretamente desse teorema e do Lema 3.1.

**Teorema 3.2.** *Seja  $G$  um grafo conexo. Então  $a_\infty^2(G) = \frac{4}{\max_{i,j \in V} \Omega_{ij}}$ .*



$$\begin{aligned} \Omega_{1,2} &= 0,5532 \\ \Omega_{1,3} &= 0,5 \\ \Omega_{1,5} &= 0,875 \\ \Omega_{2,4} &= 0,6667 \end{aligned}$$

Figura 1: Exemplo de distância resistiva:  $\Omega_{1,5}$  é a resistência equivalente quando os polos de uma bateria são conectados nos pontos 1 e 5.

### 3.2 O caso $p = q = 1$

A conectividade algébrica  $a(G) = a_2^2(G)$  tem relação com a constante de Cheeger  $h_G = \min\{\text{cut}(S)/|S| : S \subset V, |S| \leq |V|/2\}$ . Em [4], é mostrada uma relação entre  $a_p^p$  ( $p = q$ ) e  $h_G$ : para  $p > 1$ , sendo  $\Delta_G$  o grau máximo de  $G$ ,

$$(2/\Delta_G)^{p-1} (h_G/p)^p \leq a_p^p(G) \leq 2^{p-1} h_G,$$

logo  $\lim_{p \rightarrow 1^+} a_p^p(G) = h_G$ . Trataremos agora o caso  $p = q = 1$  diretamente, e não mais como um limite. Lembramos que o 1-laplaciano  $L_1$  satisfaz  $(L_1 x)_i = \sum_{j:i j \in E} \text{Sign}(x_i - x_j)$ .

**Teorema 3.3.**  $a_1^1(G) = h_G$ .

*Ideia da Demonstração.* Se  $G$  é desconexo, o resultado segue. Suponhamos então que  $G$  é conexo. Mostremos que  $a_1^1(G) \leq h_G$ . Reescrevemos a Equação (1) como

$$a_1^1(G) = \min_{0 \in \sum_i \text{Sign}(x_i)} \sum_{i j \in E} \frac{|x_i - x_j|}{\|x\|_p}.$$

Para cada  $S \subset V$  com  $|S| \leq |V|/2$ , considere  $x \in \mathbb{R}^n$  tal que  $x_i = 1$  se  $i \in S$  e  $x_i = 0$  se  $i \in \bar{S}$ . Verifica-se facilmente que  $R_1^q(x) = \frac{\text{cut}(S)}{|S|}$ . Ademais, verificamos que  $\sum_i \text{Sign}(x_i) = [-|V| + 2|S|, |V|]$ , e o limite inferior deste intervalo é não-positivo porque  $|S| \leq |V|/2$ .

Resta provar que  $a_1^1(G) \geq h_G$ . Denote-se os conjuntos  $N_x = \{i : x_i < 0\}$ ,  $P_x = \{i : x_i > 0\}$  e  $Z_x = \{i : x_i = 0\}$ . Pelo Corolário 5.34 em [3], para um autopar  $(\lambda, x)$  com  $\lambda > 0$  e  $y = \mathbf{1}_{P_x}$ ,  $(\lambda, y)$  também é um autopar com  $\lambda = \text{cut}(P_x)/|P_x|$ . A condição  $0 \in \sum_i \text{Sign}(x_i)$  é equivalente a  $|Z_x| \leq ||P_x| - |N_x||$ . Como  $|N_y| = 0$ , temos que  $|Z_y| \geq |P_y| = |P_x|$ , logo  $|P_x| \leq |V|/2$ , e portanto  $\lambda = \text{cut}(P_x)/|P_x| \geq h_G$ . Como  $a_1^1(G)$  é o menor 1-autovalor positivo de  $L_1$ , então  $a_1^1(G) \geq h_G$ , o que conclui a prova.  $\square$

### 3.3 Alguns outros resultados

#### 3.3.1 Resultados para $a_1^2$

Já falamos sobre a relação entre  $a(G)$  e a constante de Cheeger  $h_G$ , e mostramos que  $a_1^1(G) = h_G$ . Para  $q \geq 1$ , obtemos uma cota superior para  $a_1^q(G)$  que se relaciona com um particionamento de  $G$  que se aproxima de uma bissecção.

**Proposição 3.1.** *Seja  $G$  um grafo conexo com  $n$  vértices. Então*

- *existe um 1-autovetor  $x$  de  $a_1^2(G)$  com igual número de entradas positivas e negativas, e exatamente uma entrada nula se  $n$  é ímpar, e sem entradas nulas, se  $n$  é par;*
- *se  $i, j \in V$  têm a mesma vizinhança, com exceção da vizinhança entre eles, e  $\text{sign}(x_i) = \text{sign}(x_j)$ , então  $x_i = x_j$ .*

Isso possibilita, por exemplo, calcular  $a_1^2(K_n) = 1$  para  $n$  par e  $a_1^2(K_n) = 1 + 1/(n - 1)$  para  $n$  ímpar. Para grafos em geral, obtemos  $a_1^2(G)$  por um algoritmo de “força bruta”, mostrando que o problema de decisão correspondente pertence à classe de complexidade  $\mathcal{NP}$ . Conjectura-se que este problema seja  $\mathcal{NP}$ -completo.

#### 3.3.2 O limite $q \rightarrow \infty$

O cálculo de  $\lim_{q \rightarrow \infty} a_p^q(G)$  não é tão interessante. De fato, se  $|V| \geq 3$  (exceto  $K_3$ ) ou  $p > 1$ , então  $\lim_{q \rightarrow \infty} a_p^q(G) = 0$ . Definimos então a quantidade  $\tilde{a}_p^\infty(G) = \lim_{q \rightarrow \infty} (a_\infty^q(G))^{1/q}$ , e mostramos que

$$\tilde{a}_\infty^\infty(G) = \min_{u,v \in V} \min_{x_u=1=-x_v} \max_{ij \in E} |x_i - x_j|. \tag{4}$$

Mostra-se que  $\tilde{a}_\infty^\infty(G) > 0$  se e somente se  $G$  é conexo. A seguir, estabelecemos uma relação entre  $\tilde{a}_\infty^\infty(G)$  e o diâmetro de  $G$ .

**Proposição 3.2.** *Sob a convenção  $1/\infty = 0$ , para qualquer grafo  $G$ ,  $\tilde{a}_\infty^\infty(G) = 2/\text{diam}(G)$ .*

*Demonstração.* Se  $G$  é desconexo,  $\tilde{a}_\infty^\infty(G) = 0$  e o resultado segue. Se  $G$  é conexo, reescrevemos (4) como  $\tilde{a}_\infty^\infty(G) = \min_{u,v \in V, u \neq v} \alpha_{uv}$ , onde  $\alpha_{uv}$  é a solução de

$$\min\{\alpha : x_u = 1 = -x_v, |x_i - x_j| \leq \alpha, |x_i| \leq 1, i \in V, ij \in E\}.$$

Como  $G$  é conexo,  $\alpha > 0$ , então  $1/\alpha_{uv}$  é a solução de  $\max 1/\alpha$  sujeito às mesmas restrições. Introduzimos variáveis  $y_i = x_i/\alpha$ , de modo que  $\frac{1}{\alpha} = \frac{x_u}{\alpha} = y_u$  e  $1/\alpha_{uv}$  é a solução de

$$\max\{y_u : |y_i - y_j| \leq 1, |y_i| \leq y_u = y_v, i \in V, ij \in E\}$$

Seja  $u i_1 i_2 \dots i_{k-1} v$  um caminho mínimo (de tamanho  $k = d(u, v)$ ) entre  $u$  e  $v$ . Somando  $|y_i - y_j| \leq 1$  sobre as arestas do caminho, obtemos  $-k \leq y_u - y_v (= 2y_u) \leq k$ , o que equivale a  $y_u \leq k/2$ . Verifica-se que o vetor  $y$  com entradas dadas por  $y_i = \frac{1}{2} \max_{j \in V} d(u, j) - d(u, i)$  é viável e satisfaz  $y_u = k/2$ , que equivale a  $1/\alpha_{uv} = d(u, v)/2$ , e finalmente basta verificar que  $\tilde{a}_\infty^\infty(G) = \min_{u,v \in V} (1/\alpha_{uv}) = 2/\text{diam}(G)$ .  $\square$

## 4 Conclusão e trabalhos futuros

Mostramos que a generalização da conectividade algébrica  $a_p^q(G)$ , conforme se altera o valor de  $p$  e  $q$ , permite a conexão com diferentes invariantes de um grafo, como constante de Cheeger, diâmetro e distância resistiva. Claramente, ainda existem diversos casos particulares que podem ser explorados. Várias questões estão em aberto sobre a classe de complexidade dos problemas. Por exemplo, sabemos que a obtenção de  $a_2^\infty$  e  $\tilde{a}_\infty^\infty$  é feita em tempo polinomial, enquanto que a obtenção de  $a_1^1$  e possivelmente  $a_1^2$  são problemas  $\mathcal{NP}$ -completos. Talvez haja alguma monotonicidade na complexidade desses problemas; por exemplo, pode ser o caso de, para  $q$  fixo, a obtenção de  $a_p^q$  ser mais difícil (ou pelo menos tão difícil) de obter quanto menor é o valor de  $p$ .

## Referências

- [1] S. Amghibech. Eigenvalues of the discrete  $p$ -laplacian for graphs. *Ars Combinatoria* 67:283-302, 2003.
- [2] R. B. Bapat, I. Gutman, W. Xiao. A simple method for computing resistance distance. *Zeitschrift für Naturforschung* 58a:494-498, 2003.
- [3] E. M. Borba. Generalizações analíticas do espectro de um grafo. Tese de Doutorado, UFRGS, 2018. Disponível em <https://lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/190126/001070747.pdf>
- [4] T. Bühler, M. Hein. Spectral clustering based on the graph  $p$ -laplacian. Proceedings of the 26th International Conference on Machine Learning, 2009.
- [5] A. Chaiken. A combinatorial proof of the all minors matrix tree theorem. *SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods* 23:319-329, 1982.
- [6] D. J. Klein, M. and Randić. Resistance distance. *Journal of Mathematical Chemistry*, 12:81-95, 1993.
- [7] U. Luxburg. A tutorial on spectral clustering. *Statistics and Computing*, 17(4):395-416, 2007.
- [8] Y. Ye, E. Tse. An extension of karmarkar's projective algorithm for convex quadratic algorithm. *Mathematical Programming*, 44:157-159, 1989.